
相对论基础

Bryan

参考教材

1. PKU 陈斌老师待出版的广义相对论讲义，本文内容顺序与之一致；
2. Carroll, Sean M. *Spacetime and geometry*; 经典，似乎是陈斌老师讲义的原本；
3. Nakahara, Mikio. *Geometry, topology and physics*; 真正适用于物理工作者的几何；
4. <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>; 不断更新的开放巨著，几乎解答了我的所有问题。

目录

第一部分 狭义相对论的几何图景	5
1 记号和约定	5
1.1 四矢量及度规的定义	5
1.2 度规的矩阵表示	5
1.3 坐标变换与各类张量的引入	6
1.4 四维时空的单位正交基	7
2 典型洛伦兹变换的表示及意义	8
2.1 Boost 的参数表示	8
2.2 参数 θ 的物理意义	9
2.3 自然单位制下的时空一体性	9
3 数学方面的补充知识	10
3.1 双曲函数的一些特性	10
3.2 时空图的几何特征	10
3.3 时空图上的曲线	11
4 洛伦兹变换的基本推论	12
4.1 钟慢效应	12
4.2 同时的相对性	12
4.3 尺缩效应	13

目录	2
5 相对论性运动学	13
5.1 四速度的引入	13
5.2 再论速度变换公式	14
5.3 匀加速粒子的运动	14
6 狭义相对论动力学初步	15
6.1 相对论性自由粒子的作用量	15
6.2 相对论性自由粒子的拉氏量、动量和能量	15
6.3 作用量的二阶变分	16
7 零质量粒子的情形	17
7.1 光子的动量和能量	17
7.2 相对论性多普勒效应	18
8 狭义相对论中的理想流体	19
8.1 连续性方程	19
8.2 能动量张量	20
9 相对论性电动力学	21
9.1 Maxwell 方程的协变形式	21
9.2 由电磁势的外微分导出场强张量	23
第二部分 描述弯曲时空的数学工具	24
10 流形上的微分	24
10.1 时空中的有向体积元	24
10.2 高维时空中的 Hodge 对偶	26
10.3 以外微分形式书写的 Maxwell 方程	27
11 联络的基本概念与几何意义	28
11.1 矢量对易子及李导数	28
11.2 一般的仿射联络	29
11.3 平行移动与挠率的几何意义	30
12 黎曼几何的基本定理	31
12.1 联络系数与张量的协变微分	32
12.2 度规相容条件	32

目录	3
12.3 Levi-Civita 联络系数的内蕴导出	33
12.4 时空流形的对称性	33
13 测地线	34
13.1 测地线方程	34
13.2 适用于零质量粒子的作用量	35
13.3 沿测地线和非测地线的标架移动	36
14 曲率	37
14.1 黎曼曲率张量及其几何意义	37
14.2 黎曼张量的对称性	38
14.3 二维流形的黎曼张量	40
15 曲率张量的应用和推广	41
15.1 截面曲率	41
15.2 Ricci 曲率和 Einstein 张量	41
16 关于时空对称性的进一步讨论	42
16.1 Killing 矢量场与曲率的联系	42
16.2 Killing 矢量场构成李代数	43
16.3 最大对称空间的性质	44
17 测地偏移与曲率	46
17.1 测地偏移的定量描述	46
17.2 曲率张量作为正则度规的二阶修正	48
17.3 Ricci 张量与体积元	49
第三部分 广义相对论的基本内容	51
18 真空场方程	51
18.1 测地偏离与潮汐力	51
18.2 弱场近似下的真空场方程	52
18.3 球对称时空的近似解	53
18.4 球对称时空的精确解	55
19 物质告诉时空如何弯曲	56
19.1 线性化的场方程	56

目录	4
19.2 完整的 Einstein 场方程	57
19.3 对场方程和能动量张量的一些说明	57
20 运动物质与时空的耦合	59
20.1 能动量张量的定义	59
20.2 慢转星体周围的时空	60

第一部分 狭义相对论的几何图景

1 记号和约定

1.1 四矢量及度规的定义

时空中的一个事件以四矢量描述，而四矢量以其在某一参考系中的坐标分量表示，例如：

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (1.1.1)$$

此文约定，时间坐标放在最前，即 $x^0 = ct$, $(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{x}$ 则为空间坐标。

在相对论时空观中，一个粒子运动的轨道被称为世界线。考虑从时空原点发出的光子，取其世界线上的某一定点，有：

$$\mathbf{x}^2 - (ct)^2 = (ct)^2 - \mathbf{x}^2 = 0 \quad (1.1.2)$$

该等式在参考系变换（坐标变换）下保持不变（光速不变原理）。

由此，定义该四维线性空间的范数。首先，记时空的度规为 $\eta_{\mu\nu}$ ，矩阵表示：

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

从而，该空间的范数 s 可表示为：

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.1.4)$$

更一般地，定义 x^μ, y^μ 的内积为 $\eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ ，从而可以引进正交的概念。

进一步，考察该空间的对偶空间，其元素为：

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.1.5)$$

x^μ 的模方可以简洁地表示为 $x_\mu x^\mu$ 。同时，可以对称地定义 $\eta^{\mu\nu}$ ，其各分量数值上与 $\eta_{\mu\nu}$ 相同，即：

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \quad (1.1.6)$$

注意到，假定基底长度变为原来的 k 倍，则 x^μ 变为原来的 $\frac{1}{k}$ ，由此称 x^μ 为逆变矢量。又， $x_\mu x^\mu$ 在上述变化下不变，从而 x_μ 变为原来的 k 倍，故称为协变矢量。

1.2 度规的矩阵表示

如果将 x^μ 视为列矢量，则 $\eta_{\mu\nu}$ 可视作双线性泛函。事实上，可以用行指标 μ ，列指标 ν 的矩阵表示 η ，其作用于两个列矢量时，将其一转置后左乘，另一右乘。写成二次型的形式，为：

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu (\eta_{\mu\nu}) x^\nu \quad (1.2.1)$$

同时, x_μ 可视为作用于单个列矢量的线性泛函, 从而可以简单地看作行矢量; 而此时 $\eta_{\mu\nu}$ 则可以看作列矢量空间到其对偶空间——行矢量空间的同构关系。符合矩阵相乘规则的写法为:

$$x_\mu = x^\nu (\eta_{\nu\mu}) \quad (1.2.2)$$

注意, $\eta_{\mu\nu}$ 与矩阵的区别在于, 其双下标表示它必须依次作用于两个对应的上标, 才能得一常量; $\eta^{\mu\nu}$ 则与之相反, 作用于两个下标 (即行矢量)。对矩阵如何与其他量相乘则无此限制。

1.3 坐标变换与各类张量的引入

若 x^μ 可以用一系列基底 $(\lambda^\mu)_\nu = \Lambda^\mu_\nu$ 的线性组合表出, 则有:

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \quad (1.3.1)$$

x'^ν 是该事件在 $(\lambda^\mu)_\nu$ 对应的参考系中观测到的坐标, Λ^μ_ν 即联系两个参考系的洛伦兹 (逆) 变换。

上述结论隐含了一项假定, 即坐标变换是线性的, 这可以由相对性原理导出。

同样, 视逆变矢量为列矢量, 则 Λ^μ_ν 可看作以 μ 为行指标、 ν 为列指标的矩阵。当然, 由于上下标的不同, Λ^μ_ν 的作用规则与 $\eta_{\mu\nu}$ 不同—— Λ^μ_ν 作用于一列矢量, 得到另一列矢量; 若进一步将其作用于一行矢量, 则得到一常量。对比如下:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\nu &: V \longrightarrow V \\ \text{或, } V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \eta_{\mu\nu} &: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

满足这类运算规律的线性泛函即为张量。不论所描述的空间 (流形) 具有何种度规, 总是将 $\eta^{\mu\nu}$ 定义为 $\eta_{\mu\nu}$ 的逆, 即 $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$, 而其余张量的指标升降则通过与 $\eta_{\mu\nu}$ 或 $\eta^{\mu\nu}$ 相乘 (称为缩并) 定义。例如, 与 x_μ 类似, 有:

$$\Lambda_{\mu'\nu} = \eta_{\mu'\mu}\Lambda^\mu_\nu : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.3.3)$$

若取 $(-, +, +, +)$ 的度规约定, 则 $\Lambda_{\mu\nu}$ 与 Λ^μ_ν 的矩阵表示在 $\mu = 1, 2, 3$ 行完全一致, 在 $\mu = 0$ 行相差一符号。事实上, 每升、降一指标, 该指标等于 $i = 1, 2, 3$ 时的值不变, 该指标为 0 时的值变号。类似地, 还可定义:

$$\eta^\mu_\nu = \eta_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (1.3.4)$$

由于 η, δ 是对称张量, 不必区分指标顺序, 故可不错开上下标书写。

据此规律, 有:

$$x_\mu = \eta_{\mu\rho}\Lambda^\rho_\sigma x'^\sigma = \Lambda_{\mu\sigma} x'^\sigma = \Lambda_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} x'_\nu = \Lambda_{\mu\nu} x'_\nu \quad (1.3.5)$$

可见, $\Lambda_{\mu\nu}$ 和 Λ^μ_ν 互为对偶, 其指标顺序一致, 上下颠倒。注意其矩阵表示, 数值上有:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu} &= \eta_{\mu'\mu}\Lambda^{\mu'}_\nu\eta^{\nu\nu'}, \\ \Lambda_0^0 &= \Lambda^0_0, \quad \Lambda_0^i = -\Lambda^0_i, \quad \Lambda_i^0 = -\Lambda^i_0, \quad \Lambda_i^j = \Lambda^i_j \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

由于负负得正、负正得负, 取任一种度规约定, 该结论均成立。

根据前面的约定, Λ_μ^ν 作用于逆变矢量, 相当于将其表示矩阵左乘于对应的行矢量前, 这是怎么实现的呢? 事实上, 应当先将待作用的行矢量转置为列矢量, 再用 Λ_μ^ν 的表示矩阵作用, 将得到的列矢量转置回行矢量, 得到的便是作用结果。

1.4 四维时空的单位正交基

当且仅当坐标对应的基底为单位正交基时, 其范数可采用前述 (1.1.4) 公式计算。物理上, 这是惯性系的基本特性。用公式表述, 即为:

$$\eta_{\mu\nu}(\lambda^\mu)_\alpha(\lambda^\nu)_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad \text{或} \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.4.1)$$

将基底组表示为张量, 上述关系可简化为:

$$\Lambda_{\mu\alpha}\Lambda^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad \text{或} \quad \Lambda_\mu^\sigma\Lambda^\mu_\nu = \delta_\nu^\sigma \quad (1.4.2)$$

而根据逆的定义, 有 $(\Lambda^{-1})^\sigma_\mu\Lambda^\mu_\nu = \delta_\nu^\sigma$, 从而,

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda_\nu^\mu \quad (1.4.3)$$

事实上, 利用 (1.3.1), 可得:

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (1.4.4)$$

这也表明 $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda_\nu^\mu$. 其矩阵表示与 Λ^μ_ν 的关系如下所示:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}, \quad \longrightarrow \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^1_0 & -\Lambda^2_0 & -\Lambda^3_0 \\ -\Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 \\ -\Lambda^0_2 & \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 \\ -\Lambda^0_3 & \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

注: 简记 $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$

由上述讨论可知, Λ 描述了一种类似于三维转动的四维转动, 其全体构成了洛伦兹群 $O(1, 3)$; 如果不允许时间反演和宇称变换, 则满足条件的 Λ 构成子群 $SO^+(1, 3)$, 它是洛伦兹群包含单位元的联通部分。这意味着,

$$\det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0_0 \geq 0$$

同时, 有 $(\Lambda^0_0)^2 - \sum_i \Lambda^i_0 = 1$, 这表明有:

$$\Lambda^0_0 \geq 1$$

事实上, 所有 $SO^+(1, 3)$ 中的元素可以表示为两类旋转 (两类生成元, generators) 的合成:

1. **空间旋转 (rotation)**, 可以用刚体运动学的方法描述 (例如欧拉角), 含三个生成元 J_i ;
2. **不含空间旋转的时空“旋转” (boost)**, 由指定的某一空间方向 \mathbf{n} (与时间轴 ct 垂直) 和“旋转角度” θ (称为 rapidity) 描述, 同样是三个生成元 K_i 。

一般来说, 一个坐标平面定义一种 n 维旋转, 故生成元总数为 $\binom{n}{2}$. 此外, 一般的洛伦兹变换还包含时空坐标的平移 (构成 Poincare group), 下为简单起见, 取两坐标系的起点重合。

2 典型洛伦兹变换的表示及意义

2.1 Boost 的参数表示

下面尝试写出 *boost* 的基本形式。为简单起见，假定变换前后， $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$ ，即选取空间方向 $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}$ 。记：

$$S \xrightarrow{\Lambda} S', \quad x^\mu \xrightarrow{\Lambda^{-1}} x'^\mu$$

此时只需用二阶矩阵表示 Λ ，有：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^0_1 \\ -\Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

由此，可计算新基矢在原坐标系中的坐标，有：

$$\lambda_0 = \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 \\ \Lambda^1_0 \end{pmatrix}_S, \quad \lambda_1 = \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_1 \end{pmatrix}_S \quad (2.1.2)$$

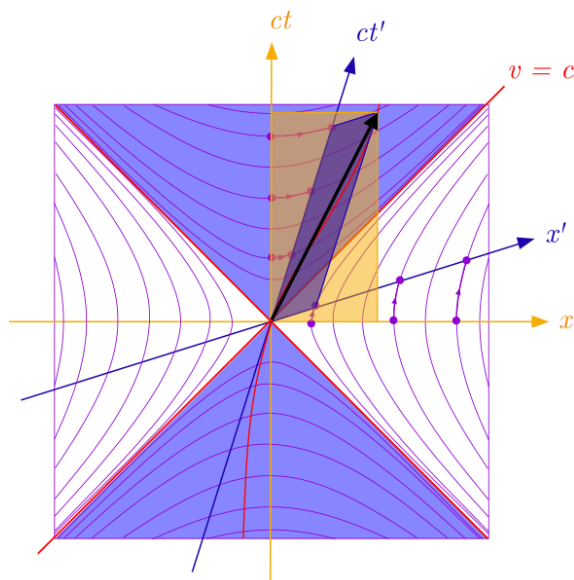
同时，要求 $\|\lambda_0\|^2 = \eta_{00}$, $\|\lambda_1\|^2 = \eta_{11}$ 。一般来说，单位化的类时矢量具有模方 η_{00} ，单位化的类空矢量具有模方 η_{ii} 。

因此，假使标准正交基 e_0, e_1 构成 \mathbb{R}^2 直角坐标系的纵、横基矢，那么 λ_0, λ_1 的端点将被限制在一组双曲线上。（该组双曲线等同于欧几里德空间 \mathbb{E}^2 中的单位圆。）具体而言，有：

$$\lambda_0 \in \left\{ (ct, x) \mid (ct)^2 - x^2 = 1 \right\}, \quad \lambda_1 \in \left\{ (ct, x) \mid (ct)^2 - x^2 = -1 \right\} \quad (2.1.3)$$

同时， $\eta_{\mu\nu}(\lambda^\mu)_0(\lambda^\nu)_1 = \eta_{01} = 0$ 。这导致 λ_0, λ_1 关于直线 $x = ct$ 对称。

综上，两组基矢的位置关系如下所示：



且上述讨论对任一种度规约定均成立。

因此，可以用双曲函数表示 $\lambda_{0,1}$ ，不妨设：

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} \cosh \theta \\ \sinh \theta \end{pmatrix}_S, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} \sinh \theta \\ \cosh \theta \end{pmatrix}_S \quad (2.1.4)$$

进一步可表达出 Λ 以及 Λ^{-1} ，从而有洛伦兹变换：

$$x'^{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} x^{\mu} \quad (2.1.5)$$

可见，*boost* 可以用双曲函数构成的对称矩阵来描述。

2.2 参数 θ 的物理意义

假想以下情形： $t = t' = 0$ 时，两参考系 S, S' 在 \mathbb{R}^3 中的空间坐标重合，且 S' 系整体以恒定速率 βc 沿 S 系的 x 轴正方向平移。事实上， S, S' 对应的四维标架原点重合，两者相差一个 x 方向上的 *boost*（“夹角”为 θ ），标架之间并没有相对运动。

在这种情况下，考察 S' 系的坐标原点，选定其世界线上的某定点，其时空位置可用 S 坐标表示为 (ct, x) ， $x = \beta ct$ ，亦可用 S' 坐标表示为 $(ct', 0)$ 。代入洛伦兹变换式（或逆变换式），可得：

$$\begin{pmatrix} ct \\ \beta ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \cosh \theta \\ ct' \sinh \theta \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

取两个分量的比值，易见：

$$\boxed{\tanh \theta = \beta} \quad (2.2.2)$$

先前定义的 θ 只是一数学上的抽象参数，由此实例我们便找到了其对应的物理意义——它是描述空间参考系相对速率的一个参量，故其名为 *rapidity*（有人译为快度）。由此便可以给出四维标架旋转的物理意义——实际上对应于三维空间中相对运动参考系之间的切换。进一步，有：

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh \theta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\beta \quad (2.2.3)$$

从而，

$$\boxed{\begin{aligned} x^{\mu} &= \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} x'^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} x'^{\mu}, \\ x'^{\mu} &= \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} x^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} x^{\mu}. \end{aligned}} \quad (2.2.4)$$

2.3 自然单位制下的时空一体性

在相对论的研究中，常取自然单位制 $c = 1$ 。此时，时空可以对等，例如光子的运动轨迹可以简洁地写为 $t = x$ 。当然，这种单位制在数值计算时并不方便，因此可能需要将最终计算结果通过量纲分析恢复到国际单位制。

在自然单位制下, $\beta = v$, 洛伦兹变换可以对称地写出:

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad (2.3.1)$$

其中, $v = \tanh \theta$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. 下文中统一采用自然单位制, 相对国际单位制来说, 它与相对论时空观更加吻合。除此之外, 如无特别说明, 采用引力研究中最常用的度规约定——东海岸约定, 即 $(-, +, +, +)$.

3 数学方面的补充知识

3.1 双曲函数的一些特性

须留意双曲函数与三角函数的关系, 例如,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{i} \sinh ix}{\cosh ix} = \frac{1}{i} \tanh ix \quad (3.1.1)$$

即 $\tanh x = -i \tan ix$. 利用这些关系, 可以方便地将三角恒等式化为双曲恒等式。例如,

$$\tanh(x + y) = -i \tan(ix + iy) = -i \frac{\tan ix + \tan iy}{1 - \tan ix \tan iy} = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \quad (3.1.2)$$

3.2 时空图的几何特征

时空图上到原点的等距线族为:

$$x^2 - t^2 = s^2, \quad s^2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad (3.2.1)$$

其中, 距离 s 是根据 η 定义的四维范数, 并非表观距离。

$s^2 = 0$ 对应过原点的一组相交直线, 其与 $t^2 > x^2$ 的区域构成光锥, 从原点出发的信号只能在光锥内传播。

欲确定某一事件 P 的坐标, 过点 P 作坐标轴的平行线, 通过其与坐标轴的交点读出 P 的坐标值。注意到, 其中一坐标轴的平行线总是与某一等距线相切, 切点恰为该平行线与另一坐标轴的交点。该结论可通过几何方法方便地证明; 除此之外, 还可考察函数关系:

$$s^2 = s^2(x^\mu)$$

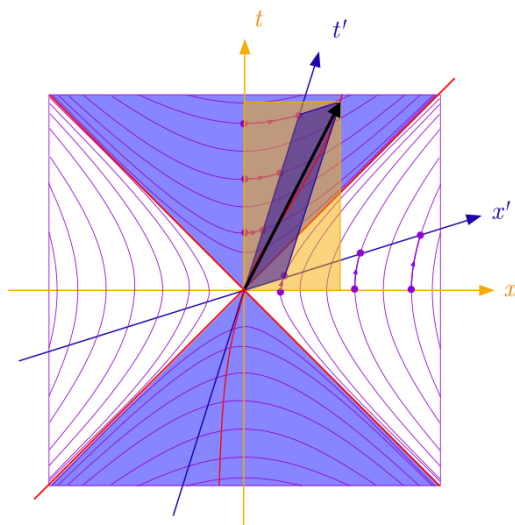
根据欧拉的齐次函数定理, $x^\mu \frac{\partial s^2}{\partial x^\mu} = 2s^2 = 2\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, 从而,

$$\frac{\partial s^2}{\partial x^\mu} = 2\eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (3.2.2)$$

若某一分量为 0, 则 s^2 对该分量的偏微商为 0, 从而此处的切线平行于坐标轴。

前面说明了 θ 的物理意义, 下面考察时空图上 θ 的几何意义。事实上, $\theta/2$ 为轴 x, x' 与等距线 $x^2 - t^2 = 1$ 所围成曲边三角形的表观面积。有:

$$A_0 = \int_0^{\phi_0} \frac{1}{2} (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) d\phi \quad (3.2.3)$$



其中表观夹角 ϕ 与快度 θ 有如下关系：

$$\tan \phi = \tanh \theta \quad \xrightarrow{d} \quad (1 + \tan^2 \phi) d\phi = (1 - \tanh^2 \theta) d\theta \quad (3.2.4)$$

代入化简，易得 $A = \frac{\theta}{2}$.

3.3 时空图上的曲线

在此基础上，可以对时空图上的曲线进行参数化。首先，我们得为粒子的世界线取定一参数描述；这个参数最好是个洛伦兹常量，此处记为 λ ，积分则给出时空间隔：

$$\Delta s = \int_{\Omega} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (3.3.1)$$

然而，根号下的内容并不总是正定的！因此，对一般粒子而言，采用原时来描述世界线的长度：

$$\Delta \tau = \int_{\Omega} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (3.3.2)$$

由此可见， $(-, +, +, +)$ 度规约定保持了空间成分的正定性，与习惯一致，但在处理实物粒子的世界线时不得不引入一个负号，这不免有些遗憾。由于实物粒子的运动始终落在光锥以内，可以保证根号下的内容始终正定，总不会发生负数开根的情形。

在此基础上，可以用 τ 对世界线进行参数化，这类似但不同于弧长参数；在该度规定义下，严格意义上的弧长参数只能是虚数。如果取 $(+, -, -, -)$ 的度规约定，则 τ 正是弧长参数，这也是西海岸约定（高能物理中常用约定）的优势之一。

4 洛伦兹变换的基本推论

4.1 钟慢效应

考虑 S' 系中定点 x'_0 世界线上的任一点, 其时间坐标 t' 在 S 系中的观测值为:

$$t = \gamma(t' + vx'_0) \quad (4.1.1)$$

从而, $\Delta t = \gamma\Delta t' > \Delta t'$, 看起来 (S 系的观测者认为) 其时钟变慢了。

也可由时空图得到此结论。不妨取 $x'_0 = 0$, 将 t' 轴上的 t'_0 点投影到 t 轴上, 得 t_0 , 再将 t'_0 点沿着等距线对应至 t 轴上与 t_0 比较, 易得: $t_0 > t'_0$ 。

上面给出的论述是基于洛伦兹变换的局部结论; 对于一般的世界线段, 可计算原时:

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (4.1.2)$$

其物理意义是明确的: 考虑质点所在的共动瞬时惯性参考系 (*comoving instantaneous inertial reference frame*, 又称 *instantaneous rest fram, IRF*), 粒子相对此参考系瞬时静止, 有:

$$d\mathbf{x} = 0, \quad d\tau = dt \quad (4.1.3)$$

但须注意, 往往 $d^2\mathbf{x} \neq 0$ (可以类比经典力学中的瞬心概念以加强理解)。可见, 假想粒子携带一个时钟, 该时钟走过的时间 t 便恰好对应粒子的原时 τ , 因此原时又称为固有时。

展开 $\Delta\tau$, 有:

$$\Delta\tau = \int \sqrt{(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2} = \int dt \sqrt{1 - v^2} < \Delta t \quad (4.1.4)$$

这便是一般性的钟慢效应。

4.2 同时的相对性

考虑 S' 中 t'_0 时刻在 x'_1, x'_2 处同时发生的两个事件, 利用:

$$t = \gamma(t'_0 + vx') \quad (4.2.1)$$

可得 $\Delta t = \gamma v \Delta x' \neq 0$. 从时空图上看, 显然总有 $\Delta t \neq 0$.

一般来说, 两分立事件在两不同参考系中观测到的时间有如下关系:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x') = \gamma\Delta t' \left(1 + v\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right) \quad (4.2.2)$$

参考系的 $|v| < 1$, 因此 $\Delta t, \Delta t'$ 异号仅在 $\left|\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right| > c$ 时可能发生。

如果两事件有因果联系, 由于信号传递以光速为极限, 故必有 $\left|\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right| < c$, 因此 $\Delta t, \Delta t'$ 同号。考察相应的时空图, 可能的第二事件必落在第一事件的光锥内, 也可得出 $\Delta t, \Delta t'$ 同号的结论。因此, 光速极限保证了因果律; 也可以说, 正因为因果律不可违背, 光速必为信息传递的极限。

4.3 尺缩效应

考虑 S' 中静置于 x' 轴上的一把直尺, 其端点坐标 x'_1, x'_2 , 观察其两端在同一时刻 t'_0 反射的光子, 可得其长度 $L = x'_2 - x'_1$. 在 S 系看来, 两端点的光子不是同时发出的, 因此直尺的长度等于坐标 x_1, x_2 的差值, 再减去 t_1, t_2 间隔内参考系移动的距离, 即有:

$$L = x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) = \gamma L_0 - v(\gamma v L_0) = \sqrt{1 - v^2} L_0 \quad (4.3.1)$$

这是一种直接但愚蠢的计算方法; 事实上, 应观察直尺两端在 S 系中同一 t_0 时刻反射的光子. 虽然在 S' 系看来这两个光子并不是同时发出的, 但是直尺静止于 S' 系中, 任选两时间点, 分别去测量两端点的坐标, 都将是 x'_1, x'_2 , 因此不必考虑测量的同时性. 从而,

$$L = \Delta x \Big|_{t_0} = \frac{1}{\gamma} \Delta x' = L_0 \sqrt{1 - v^2} \quad (4.3.2)$$

因此, 在 S 系看来尺子变短了。

5 相对论性运动学

5.1 四速度的引入

在四维时空中考察粒子的运动, 其“速度”可通过世界线 x^μ 的切矢量来定义:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.1.1)$$

注意有 $u_\mu u^\mu \equiv -1 = -c^2$. 可见, u^μ 是个类时的单位化逆变矢量, 其变换规律与 x^μ 一致, 从而:

$$u'^\mu = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & & \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} u^\mu \quad (5.1.2)$$

在粒子的共动惯性系中, 有 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$; 在一般参考系中, 利用 $\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt}$, 可以将四速度用 $v_{x,y,z}$ 表示, 即:

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} (1, \mathbf{v}) \quad (5.1.3)$$

代入上述变换公式, 有:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}}_{\alpha} \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & & \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (5.1.4)$$

可见, 实际的速度变换与洛伦兹变换相差一个因子 α . 考察第一分量, 可以写出 α 的表达式:

$$\alpha = \frac{1}{\cosh \theta - v_x \sinh \theta} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x \beta} \quad (5.1.5)$$

其中, 为区分粒子速度与参考系平移速度, 将后者记为 β .

另，系数 $\alpha = \frac{dt}{d\tau} / \frac{dt'}{d\tau} = \frac{dt}{dt'}$ ，其表达式也可直接由洛伦兹变换导出。

5.2 再论速度变换公式

不难验证，*boost* 作为快度 θ 的函数，具有以下特性：

$$\Lambda_{(\theta)}\Lambda_{(\varphi)} = \Lambda_{(\theta+\varphi)}, \quad \Lambda_{(-\theta)} = \Lambda_{(\theta)}^{-1} \quad (5.2.1)$$

这可以由双曲函数的和角公式导出。

考虑时空坐标为 (t, x) 的质点所在的共动惯性系 \tilde{S} ，质点在此时此刻相对 \tilde{S} 静止，而 \tilde{S} 相对 S 以速度 \mathbf{v} 匀速直线运动，相对 S' 以速度 \mathbf{v}' 匀速直线运动。有变换关系：

$$\begin{aligned} S' \xrightarrow{\tilde{\Lambda}'} \tilde{S} &\cong S' \xrightarrow{\Lambda_{(-\theta)}} S \xrightarrow{\tilde{\Lambda}} \tilde{S} \\ \tilde{\Lambda}' &= \tilde{\Lambda} \Lambda_{(-\theta)} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

x 方向上， $\Lambda_{(\phi'_x)} = \Lambda_{(\phi_x)}\Lambda_{(-\theta)}$ ，

$$v'_x = \tanh \phi'_x = \tanh(\phi_x - \theta) = \frac{\tanh \phi_x - \tanh \theta}{1 - \tanh \phi_x \tanh \theta} = \frac{v_x - \beta}{1 - v_x \beta} \quad (5.2.3)$$

或者更直观地，考虑速度叠加，则利用 $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}'\Lambda_{(\theta)}$ ，有：

$$v'_x = \tanh \phi'_x = \tanh(\theta + \phi'_x) = \frac{\tanh \theta + \tanh \phi'_x}{1 + \tanh \theta \tanh \phi'_x} = \frac{\beta + v'_x}{1 + \beta v'_x} \quad (5.2.4)$$

而 y, z 方向上的速度变换相当于两个不同方向 *boost* 的叠加，用这种方法推导就较为繁琐，可以通过定义直接证明，例如，

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta dx)} = v_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x \beta} \quad (5.2.5)$$

5.3 匀加速粒子的运动

将速度变换进一步微分，可以得到加速度的洛伦兹变换；注意到，伽利略变换中加速度是不变的，而洛伦兹变换中加速度会发生复杂的变化（除非 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ，那么依然有 $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$ ）。

下面考察的匀加速运动，是相对前述的粒子瞬时共动惯性系（IRF，此处取为 S' ）而言的；仅考虑一个维度， $v_x = v = \beta$ ， $a' = a'_x$ 则加速度变换可以简化为：

$$a' = (1 - v^2)^{-\frac{3}{2}} a \quad (5.3.1)$$

令 $a' = a_0$ ，解微分方程，给出粒子的轨迹为 (t, x) 图上的一支双曲线。事实上，由于粒子不断加速，而速度上限是 c ，可以想象粒子必然沿着一条以 $x = t - t_0$ 为渐近线的曲线运动。

有意思的是，由时空图可见，匀加速运动的观测者具有视界，在渐近线另一侧的事件永远无法被该观测者观察到，他/她/它只能看到视界一侧的时空。

6 狭义相对论动力学初步

我们将从最小作用量原理出发, 结合洛伦兹不变性, 再加上一些对称性考虑, 从而最终表示出相对论性自由粒子的作用量。

根据粒子的作用量, 我们可以写出其拉格朗日量, 进而导出相对论性动量、能量的表达式。

6.1 相对论性自由粒子的作用量

首先, 对相对论性自由粒子而言, 作用量 S 必须是洛伦兹标量。其原因是, S 是粒子世界线的泛函; 虽说在不同的坐标系中粒子的世界线有不同的坐标表示, 但是这些坐标表示指代的是四维时空中的同一主体, 该主体的存在与坐标表示无关。

除此之外, 对相对论性自由粒子而言, 其时空平移不变性要求由 S 导出的拉格朗日量 L 不能显含时空坐标。因此, S 应完全由洛伦兹标量构造而出。

事实上, 自由粒子世界线唯一具有的标量参量正是 $\Delta\tau$ 。此外, 粒子的静质量 m_0 也可以出现在表达式中, 它描述了粒子本身的力学性质。上述 $d\tau, m_0, c$ 是可能构成作用量的所有洛伦兹标量。采用量纲分析的方法, 保留光速 c 而不用 1 代替, 可得:

$$S = -m_0 c^2 \Delta\tau = -m_0 c \int_{\Omega} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad (6.1.1)$$

取 -1 为系数, 是为了保证 $\delta S = 0$ 时 S 取极小而非极大 (自由粒子的原时最长)。

6.2 相对论性自由粒子的拉氏量、动量和能量

对 S 的积分表达式执行变量替换 $\tau \rightarrow t$, 得到粒子在直角坐标系中的拉格朗日量:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} \quad (6.2.1)$$

该式不显含 \mathbf{x} , 我们自然得到了相对论性粒子的动量表达式以及该粒子的运动方程:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (6.2.2)$$

首先, 该动量定义在非相对论情形下退化为牛顿力学中的动量, 可见其合理性; 同时, 其形式又与经典定义不尽相同; 如果坚持使用经典表达式 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, 只能相应地修改 m 的定义, 故引入动质量的概念, 这在普通物理中是常用的手段。然而, 在实际研究中, 往往倾向于修改动量的定义, 本文亦如此; 故此后去掉 m_0 之角标, 直接以 m 表示粒子的静质量。

除此之外, 注意到 L 不显含 t , 我们得到相对论性自由粒子的能量表达式:

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \gamma m c^2 \quad (6.2.3)$$

这正是著名的质能方程。注意, 此处 $\gamma = \gamma(\mathbf{v})$ 是粒子速度的函数, 并非标架平移速度的函数。

还可以直接将拉格朗日量表示为四维情形，此时重取自然单位制，有：

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu, \tau) = -m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6.2.4)$$

数值上有 $L|_{C_0} \equiv -m = -mc^2$ ，但我们关注的是 L 对 \dot{x}^μ 的依赖关系。

类似地， L 不显含 x^μ ，从而可定义四动量：

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m\dot{x}_\mu, \quad p^\mu = m\dot{x}^\mu \quad (6.2.5)$$

进一步得粒子的世界线方程：

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (6.2.6)$$

它是四维时空中的一条直线；事实上，该结果与 (6.2.2) 完全一致。

注意到，上述定义使得 p^μ 的空间分量恰好正是 \mathbf{p} ，又 $E = \gamma m$ ，故有：

$$p^\mu = (\gamma m, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p}) \quad (6.2.7)$$

其模长 $p_\mu p^\mu = -m^2 = -E^2 + \mathbf{p}^2$ ，即：

$$E^2 = m^2 + p^2 \quad (6.2.8)$$

上述简洁的质能关系又一次体现了自然坐标的优越性；进一步，若考虑粒子的共动参考系，则更有 $E = m$ ，简洁有力。

可以在相对论情形下推广牛顿力学（矢量力学），依然定义：

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.2.9)$$

可以验证，“动能定理”依然成立：

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \frac{1}{2\gamma m} d\mathbf{p}^2 = dE \quad (6.2.10)$$

另外，在粒子的瞬时共动惯性系中， $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ，不难验证恰有 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ，经典的牛顿第二定律成立，此时恒力将给出恒定加速度。

6.3 作用量的二阶变分

作用两前的负号源于闵氏时空的几何性质；前已论证，有所谓钟慢效应，即闵氏时空中的直线实际对应固有时的极大而非极小。事实上，在 $m > 0$ 的前提下，考虑二阶变分：

$$\delta^2 S = \left(\delta \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \right)^2 S(\dot{x}^\mu) \quad (6.3.1)$$

注意到, 对实际路径, $\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = 1$, 则:

$$\begin{aligned}
\delta^2 S &= -m \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{1}{2\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu} (-\eta_{\rho\sigma}\dot{x}^\rho\dot{x}^\sigma) \delta \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu d\tau \\
&= -m \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{-\eta_{\nu\sigma}\dot{x}^\sigma}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}} \delta \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu d\tau \\
&= -m \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (-\eta_{\nu\sigma}\dot{x}^\sigma) - (-\eta_{\nu\sigma}\dot{x}^\sigma) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta} \right) \delta \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu d\tau \\
&= -m \int_{\Omega} \left(-\eta_{\mu\nu} + \eta_{\nu\sigma}\dot{x}^\sigma \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta) \right) \delta \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu d\tau \\
&= -m \int_{\Omega} \left(-\eta_{\mu\nu} + \eta_{\nu\sigma}\dot{x}^\sigma (-\eta_{\mu\rho}\dot{x}^\rho) \right) \delta \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu d\tau \\
&= m \int_{\Omega} \left(\eta_{\mu\nu} + \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \right) \delta \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu d\tau
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

总有 $\delta^2 S > 0$. 若取 +1 为系数, 将导出 $\delta^2 S < 0$, 这与最小作用量的观念不符。

7 零质量粒子的情形

零质量粒子指的是静止质量 $m = 0$ 的粒子。此时, 上述讨论部分失效, 需要加以修正。下面以光子为例, 讨论其动力学特性。

7.1 光子的动量和能量

首先我们论证: 零质量粒子必定总以光速行进。假定某粒子 $m = 0$, 而 $v < c$, 那么在任何惯性参考系中套用动量、能量公式, 都有其动量、能量为 0:

$$\mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad E = 0, \quad p^\mu = 0$$

假定该粒子与某正常粒子碰撞, 根据动量、能量守恒, 正常粒子的运动不会收到任何影响。这表明, 即使这类粒子存在, 它们也无法和其他粒子相互作用, 从而永远无法被探测到。除非, 该粒子以光速行进, 则:

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{k}} c \lim_{\substack{m \rightarrow 0 \\ v \rightarrow c}} \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{7.1.1}$$

右侧极限为 $\frac{0}{0}$ 形式, 因此 \mathbf{p} 可能非零。此时, 动量、能量关系简化为:

$$E = pc, \quad p^\mu = (p, \mathbf{p}) \tag{7.1.2}$$

取 $c = 1$, 则 $E = p$, $p^\mu = (E, \mathbf{p})$. 对光子而言, $E = h\nu = \hbar\omega$, 则:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (7.1.3)$$

由此定义波四矢:

$$k^\mu = (\omega, \mathbf{k}), \quad p^\mu = \hbar k^\mu \quad (7.1.4)$$

下面给出光子的运动学描述。光子的世界线是特殊的, 其表观长度各异, 但总有 $\Delta s = \Delta\tau = 0$. 因此, 无法以固有时或弧长将其自然地参数化; 只得从粒子在某一特定惯性系中的方程出发, 考虑可能的参数取法。例如, 对世界线 $x = t$, 可取:

$$x^\mu = u^\mu t, \quad u^\mu = (1, 1, 0, 0) \quad (7.1.5)$$

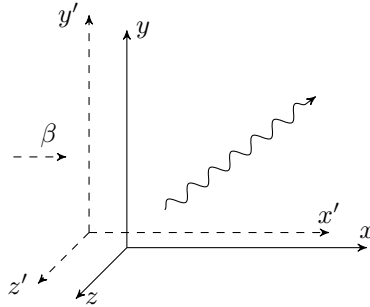
其中 u^μ 源于该参考系中的速度 (但此时为 *null* 矢量, 即 $u_\mu u^\mu = 0$), λ 源于该参考系的时间 t . 要求 u^μ 按矢量规律变换, 则 t 进化为一适用于任意参考系的洛伦兹标量。光子的匀速运动, 通过恒等式 $\frac{du^\mu}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^\mu}{dt} \right) = 0$ 得以体现。

往往进一步取一仿射变换: $\lambda = at + b$, 使得:

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (7.1.6)$$

注意此时的 λ 含有 m^{-1} 的量纲。

7.2 相对论性多普勒效应



考虑光子四动量 p^μ 的洛伦兹变换。设从 S' 系中的一静止光源发出波长为 λ_0 的光子; 在 S 系看来, 光子沿与 $+x$ 夹角为 ϕ 的方向运动, 观测其波长为 λ . 略去 z 分量, 有:

$$p^\mu = (p; p \cos \phi, p \sin \phi), \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad (7.2.1)$$

依惯例, 设两参考系沿 x 方向相对靠近, 速率恒定为 β , 从而,

$$p'^\mu = \begin{pmatrix} p' \\ p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p \cos \phi \\ p \sin \phi \end{pmatrix} \quad (7.2.2)$$

易得,

$$p'^{\mu} = p \left(\gamma(1 - \beta \cos \phi); \gamma(\cos \phi - \beta), \sin \phi \right) \quad (7.2.3)$$

又 $p \propto \frac{1}{\lambda}$, 从而,

$$\lambda = \lambda_0 \gamma(1 - \beta \cos \phi) \quad (7.2.4)$$

这正是多普勒效应的公式表示。

除此之外, S, S' 系中光子的运动方向并不相同, 有:

$$\cos \phi' = \frac{\cos \phi - \beta}{1 - \beta \cos \phi}, \quad \sin \phi' = \frac{\sin \phi}{\gamma(1 - \beta \cos \phi)} \quad (7.2.5)$$

注意到该式与速度变换惊人地相似; 乘上一个因子 c 即可发现, 它正是洛伦兹速度变换。逆变换:

$$\cos \phi = \frac{\cos \phi' + \beta}{1 + \beta \cos \phi'}, \quad \sin \phi = \frac{\sin \phi'}{\gamma(1 + \beta \cos \phi')} \quad (7.2.6)$$

注意到, 有 $\phi < \phi'$, 在 S 系看来, 光线聚集到 $+x$ 方向上, 正所谓前灯效应。

8 狭义相对论中的理想流体

粒子数在洛伦兹变换下守恒; 然而, 体积元乃至粒子的速度均会随参考系变换而发生变化。因此, 有必要讨论经典流体力学在狭义相对论下的形式。

8.1 连续性方程

首先约定, 与体积元共动的参考系中的物理量以不带撇的记号表示; 例如, 粒子数密度:

$$n' = \frac{N}{V'} = \frac{N}{V/\gamma} = \gamma n \quad (8.1.1)$$

重记粒子数通量为 \mathbf{N} , 注意到,

$$N^i = n' v^i = \gamma n v^i = n u^i \quad (8.1.2)$$

由此, 可以自然地定义通量四矢:

$$N^{\mu} = n u^{\mu} \quad (8.1.3)$$

考察静止系中的粒子数守恒, 有连续性方程:

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (8.1.4)$$

注意到, $N^0 = n u^0 = n'$, 因此连续性方程可以自然地推广到十分美妙的四维协变形式:

$$\partial_{\mu} N^{\mu} = 0 \quad (8.1.5)$$

8.2 能动量张量

考虑粒子的能量 (动质量), 有 $\rho' = (\gamma n)(\gamma m) = \gamma^2 nm = \gamma^2 \rho$. 注意到表达式中的 γ^2 因子, 这暗示着它源自两个四矢量的并矢. 事实上, 有:

$$T^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = \rho u^\mu u^\nu \quad (8.2.1)$$

等式右边的 $\rho = nm$ 是静质量的空间分布.

能动量 / 协强张量之概念源自连续介质力学. 下面给出其在经典流体力学框架下的物理意义. 根据牛顿第二定律, 有:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (8.2.2)$$

其中作用力密度 \mathbf{f} 分为两项: 一项是粒子间相互作用 \mathbf{f}_p , 可以用压强 p 表征; 另一项是长程相互作用, 如重力场中的流体受力 $\mathbf{f}_{\text{ext}} = -\rho g \hat{\mathbf{k}}$.

下面将 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 和 \mathbf{f} 用场的物理参量表示出来, 首先有:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) && \text{(Euler 观点)} \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) && \text{(Lagrange 观点)} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} && (8.2.3) \end{aligned}$$

由定义, 可将 \mathbf{f}_p 用 p 表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p &= \frac{1}{dV} \oint_{\partial(dV)} \mathbf{p} d\sigma, \quad \mathbf{p} = -p \hat{\mathbf{n}} \text{ 为作用力面密度,} \\ &= \frac{1}{dV} \oint_{\partial(dV)} -p d\sigma \\ &= \frac{1}{dV} \iiint_{dV} -\nabla p dV \\ &= -\nabla p \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

将上面得到的表达式代入牛顿第二定律, 便得到了著名的欧拉方程:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (8.2.5)$$

对 $\mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$, 结合欧拉方程与连续性方程, 考察流体的动量变化:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i + \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} \\ &= \left(-\partial_j (\rho v^j) \right) v^i + \rho \left(-v^j \partial_j v^i - \frac{1}{\rho} \partial^i p \right) \\ &= -\partial^i p - \partial_j (\rho v^i v^j) \\ &= -\partial_j (p \delta^{ij} + \rho v^i v^j) \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

由此，可以自然地引入 T^{ij} ，有定义：

$$T^{ij} = p\delta^{ij} + \rho v^i v^j \quad (8.2.7)$$

对实际流体而言， T^{ij} 的对角元表示沿法向的动量传递，主要与压强相关；非对角元则主要由液体的粘滞剪切贡献（当然，由于上述模型之简化，该项未体现在表达式中）。类似连续性方程，有：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \partial_j T^{ij} = 0 \quad (8.2.8)$$

下面回到四维时空的情形。在前面给出的 (8.2.1) 中并未考虑压强的贡献；若考虑压强，且考虑粒子的共动坐标 ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$)，则同样有：

$$T^{ij} = p\delta^{ij} \quad (8.2.9)$$

同时，还有 $T^{00} = \rho$ ，这给出一种最简单的流体之能动量张量：

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu} \quad (8.2.10)$$

分析上述 $T^{\mu\nu}$ ，可见该流体在静止参考系中没有粘滞性、没有热传导；可以认为它是理想气体的推广，称之为理想流体。当然，对尘埃而言，上述表达式退化为 (8.2.1)。同时，(8.2.8) 化为能动量守恒关系：

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (8.2.11)$$

考察该式在 u^ν 方向与垂直 u^ν 方向的投影，分别得到能量守恒方程与欧拉方程。

9 相对论性电动力学

狭义相对论本就是为电动力学量身定制的动力学理论；下面我们在四维时空的框架下重新书写 Maxwell 方程，从而自然验证其协变特性。

9.1 Maxwell 方程的协变形式

考察高斯制下的 Maxwell 方程组：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= 4\pi\mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

其中我们依然取定了 $c = 1$ 。方程组中，电和磁并不是完全对称的；在磁荷不存在的前提下，我们得以引入电磁势： (A^0, \mathbf{A}) ，使得：

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (9.1.2)$$

注意此时取度规约定 $(-, +, +, +)$, 定义达朗贝尔算子 \square^2 与 L :

$$\begin{aligned}\square^2 &\equiv -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \partial^\mu \partial_\mu \\ L &\equiv \frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_\mu A^\mu\end{aligned}\quad (9.1.3)$$

如此便可以电磁势重写 Maxwell 方程; 其中的齐次方程自动得到满足, 而非齐次方程化为:

$$\begin{aligned}\square^2 A^0 + \frac{\partial L}{\partial t} &= -4\pi\rho \\ \square^2 \mathbf{A} - \nabla L &= -4\pi\mathbf{J}\end{aligned}\quad (9.1.4)$$

将上述方程用分量形式书写, 注意到 $A_i = A^i$, 有:

$$\begin{aligned}\partial^\mu \partial_\mu A^0 + \partial_0 \partial_\mu A^\mu &= -4\pi\rho \\ \partial^\mu \partial_\mu A_i - \partial_i \partial^\mu A_\mu &= -4\pi J_i\end{aligned}\quad (9.1.5)$$

统一将 A^μ 替换为 A_μ , 注意到 $A_0 = -A^0$, 有:

$$\begin{aligned}\partial^\mu \partial_\mu A_0 - \partial_0 \partial^\mu A_\mu &= +4\pi\rho \\ \partial^\mu \partial_\mu A_i - \partial_i \partial^\mu A_\mu &= -4\pi J_i\end{aligned}\quad (9.1.6)$$

两式相加, 定义 $J_\nu = (-\rho, \mathbf{J})$, 即 $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, 便得到:

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = \partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -4\pi J_\nu \quad (9.1.7)$$

定义反对称张量:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (9.1.8)$$

则 Maxwell 方程组中的非齐次部分简化为:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -4\pi J_\nu \quad (9.1.9)$$

或换用上指标书写, 则为:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu \quad (9.1.10)$$

考察 $F_{\mu\nu}$ 的分量; 首先, 有:

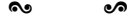
$$F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A_i = E_i \quad (9.1.11)$$

此外, 注意到有 $B^k = \epsilon^{klm} \partial_l A_m$, 故:

$$\epsilon_{ijk} B^k = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l) \partial_l A_m = F_{ij} \quad (9.1.12)$$

或者说, 数值上 $F_{ij} = B_k$, 当 (i, j, k) 构成 $(1, 2, 3)$ 的偶排列时。

综上所述, 我们成功地把 Maxwell 方程组的非齐次成分用 (9.1.10) 表达了出来; 而根据电磁势以及 (9.1.8) 的定义, 齐次方程此时自然成立, 这便得到了相对论性电动力学。



上述计算给出了 Maxwell 方程的协变形式, 但 A^μ, J^μ 只是分量的组合, 我们并未说明其协变性; 这里我们将验证, J^μ 确实是一个四矢量, 从而表明 Maxwell 理论自然协变。首先, 我们发现,

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \quad (9.1.13)$$

这里 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 表征电荷分布; ρ, dt 在洛伦兹变换下的变化规律一致, 均相差一个因子 γ , 因此 J^μ 确实是个逆变四矢量。事实上, 这里的 J^μ 完全可以和前文中的 N^μ 类比。

在此基础上, 根据 Maxwell 方程, A^μ 也是逆变四矢量, 从而 $F_{\mu\nu}$ 是严格意义上的张量。可见, Maxwell 理论自然具有协变性质。

9.2 由电磁势的外微分导出场强张量

考察上述推导, 结合 \mathbf{A} 的引入过程, 可见 1-形式:

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (9.2.1)$$

具有关键的意义。计算其外微分, 有:

$$\begin{aligned} dA &= dA_\mu \wedge dx^\mu = \partial_\nu A_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

可见自然得到了 $F_{\mu\nu}$ 。

欲得到 dA 的分量表示, 我们需要将反对称张量积 \wedge 表示为一般张量积 \otimes 。一般有:

$$\bigwedge_{i=1}^p f^i = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \text{sgn } \sigma \bigotimes_{i=1}^p f^{\sigma(i)} \quad (9.2.3)$$

对 dA 应用上述公式, 有:

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu - \frac{1}{2} F_{\nu\mu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

可见, $F_{\mu\nu}$ 正是 $dA = F$ 的分量。一般来说, 对 p 形式:

$$T = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (9.2.5)$$

假定分量记号 $T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$ 已经反对称化, 则类似有:

$$T = T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_p} \quad (9.2.6)$$

同时，我们还可一般地写出 p 形式外微分所得 $p+1$ 形式的分量表式：

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{p!} \partial_{\mu_0} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_0} \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \partial_{[\mu_0} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]} dx^{\mu_0} \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \left((p+1) \partial_{[\mu_0} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]} \right) dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

可见，

$$(dT)_{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = (p+1) \partial_{[\mu_0} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]} \quad (9.2.8)$$

其中，记号 $[\cdot]$ 表示将方框内的指标反对称化，一般地，若框内含 p 个指标，则：

$$T_{\dots[\cdot]\dots} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \text{sgn } \sigma \left(T_{\dots\sigma(\cdot)\dots} \right) \quad (9.2.9)$$

第二部分 描述弯曲时空的数学工具

下面我们尝试将狭义相对论中的结论推广到弯曲时空。首先，度规张量不再是常数了！我们用 $g_{\mu\nu}$ 来代替 $\eta_{\mu\nu}$ ，相应地，协变、逆变量的定义都应参照 $g_{\mu\nu}$ 相应地发生变化。

须注意，弯曲时空中 x^μ 不再是一个矢量了，它只是坐标；只有其微分 dx^μ 是一个（余）矢量。在平直时空中，由于切空间与原空间完全重合，因此若取仿射坐标——即 x^μ 是标准直角坐标的线性变换加平移，则 x^μ 也可以看作矢量来处理。这是一个美好的巧合，但一旦不取仿射坐标，例如 \mathbb{E}^3 中取球坐标，则 x^μ 不再满足矢量叠加原理；如今对于弯曲空间，自然更是不再成立。

10 流形上的微分

10.1 时空中的有向体积元

为掌握相应参量的变化规律，最好从有关的不变量开始研究。高维空间（流形）最显见的几何量便是其面积 / 体积。然而，由于我们处理的是赝黎曼流形，需要小心地避免负数开根的情况。推广 $n \leq 3$ 维空间中的体积元，得到 $n+1$ 维时空体积元之定义：

$$d\Omega = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (10.1.1)$$

这里的 $|g|$ 指的是 $|\det g|$ ，即度规张量行列式的绝对值。

这里回顾一下行列式的一般定义。首先，对 $(1,1)$ 张量 Λ ，有：

$$\det \Lambda = \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} \Lambda^{\mu_0}_{0} \dots \Lambda^{\mu_n}_{n} \quad (10.1.2)$$

其中 $\epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n}$ 是 Levi-Civita 符号，其分量在所有参考系中均是 0 或 ± 1 ，故不是严格意义上的张量。

可见, (1, 1) 张量的行列式即其矩阵表示的行列式, 由此矩阵行列式的一些特性得以直接应用。在定义式中, Λ^μ_ν 的下指标以 $0, 1, 2, \dots, n$ 顺序排列。交换两列, 行列式的符号发生改变; 也就是说, 有如下关系:

$$\epsilon_{\nu_0 \dots \nu_n} \det \Lambda = \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} \Lambda^{\mu_0}_{\nu_0} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} \quad (10.1.3)$$

定义上指标的 Levi-Civita 符号与下指标的对应数值相等, 则有 $\epsilon_{\nu_0 \dots \nu_n} \epsilon^{\nu_0 \dots \nu_n} = (n+1)!$, 从而:

$$\det \Lambda = \frac{1}{(n+1)!} \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} \epsilon^{\nu_0 \dots \nu_n} \Lambda^{\mu_0}_{\nu_0} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} \quad (10.1.4)$$

对于 (0, 2) 张量 g 来说, 同样依照其矩阵表示定义其行列式:

$$\det g = \frac{1}{(n+1)!} \epsilon^{\mu_0 \dots \mu_n} \epsilon^{\nu_0 \dots \nu_n} g_{\mu_0 \nu_0} \dots g_{\mu_n \nu_n} \quad (10.1.5)$$

注意! 这里采用的定义中, $\epsilon^{\nu_0 \dots \nu_n}$ 并不是由 $\epsilon_{\nu_0 \dots \nu_n}$ 指标上升得到的; 事实上, 考虑 g^{-1} ,

$$\epsilon^{\nu_0 \dots \nu_n} = \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} g^{\mu_0 \nu_0} \dots g^{\mu_n \nu_n} \det g \quad (10.1.6)$$

它与一般的指标上升差了个 $\det g$ 因子。

类似地, 可以定义张量 Λ 的迹:

$$\text{tr } \Lambda = \Lambda^\mu_\mu = \Lambda^\mu_\nu \delta^\nu_\mu = g^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu} \quad (10.1.7)$$

即将 Λ 的指标完全缩并后的值, 从而有:

$$\text{tr } g = g^\mu_\mu = g^{\mu\nu} g_{\nu\mu} = \delta^\mu_\mu = n+1 \quad (10.1.8)$$

可见, 与行列式不同, (0, 2) 张量的迹并不等于其矩阵表示的迹。事实上, 张量的迹是一洛伦兹标量, 而其行列式不是。例如, 考虑 $\det g$ 在坐标变换下的行为, 由于:

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}$$

定义 Jacobian $J = \det \left(\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \right)$, 则有:

$$\det g = J^2 \det \tilde{g}, \quad \det \tilde{g} = J^{-2} \det g \quad (10.1.9)$$

再看 Levi-Civita 符号本身, 在 (10.1.3) 中令 $\Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}$, 可得:

$$\epsilon_{\nu_0 \dots \nu_n} = J^{-1} \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_0}}{\partial x^{\nu_0}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}}, \quad \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} = J \epsilon_{\nu_0 \dots \nu_n} \frac{\partial x^{\nu_0}}{\partial \tilde{x}^{\mu_0}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial \tilde{x}^{\mu_n}} \quad (10.1.10)$$

可见, $\det g$ 和 $\epsilon_{\nu_0 \dots \nu_n}$ 在坐标变换下的变化类似于张量, 但相差一个 J^k 因子; 这种量称为张量密度, k 称为张量密度的权 (weight)。

这表明, 虽然 $\det g$ 不是张量, 但:

$$\sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} \quad (10.1.11)$$

是一个货真价实的张量! 这里我们考虑保持定向的坐标变换, 从而 $J > 0$ 。这自然保证了上面定义的体积元 (volume form) 是一几何量, 因为:

$$d\Omega = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n = \frac{1}{(n+1)!} \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_0 \dots \mu_n} dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \quad (10.1.12)$$

10.2 高维时空中的 Hodge 对偶

在这一节的讨论中, 为不失数学上的一般性, 考虑 n 维时空 (而非上一节的 $n+1$ 维时空), 允许度规场正则形式中含有 s 个负元。如采用本文的号差约定, 则一般有 $n=4$, 时间维数 $s=-1$, 空间维数 $n-s=3$ 。使用记号 s , 可使结论同样适用于另一种号差约定。

利用 (10.1.6), 可以给出提升指标的体积元张量分量:

$$((d\Omega)^\sharp)^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{\sqrt{|g|}}{\det g} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{\operatorname{sgn} g}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{(-1)^s}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (10.2.1)$$

这里利用了关系式 $\operatorname{sgn} g = (-1)^s$ 。当然, 假定度规张量是非退化的。

在此基础上, 对 p 形式 A , 定义 Hodge 对偶:

$$\begin{aligned} (\star A)_\mu &= \frac{1}{p!} \sqrt{|g|} \epsilon_{\nu\mu} A^\nu, \\ \star A &= \frac{1}{p! q!} \sqrt{|g|} \epsilon_{\nu\mu} A^\nu dx^\mu, \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

为简洁起见, 引入了多重指标记号 ν, μ , 且记 $q = n - p$ 。

这一定义并非空穴来风, 为指出其来源, 考察 \mathbb{R}^3 , 取标准直角坐标, 有:

$$\star(A \wedge B)_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (A \wedge B)^{ij} \quad (10.2.3)$$

其中 $A = A_i dx^i, B = B_i dx^i$, 从而 $(A \wedge B)_{ij} = A_{[i} B_{j]}$, 这表明:

$$\star(A \wedge B)^k = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} A_{[i} B_{j]} = \epsilon^{ijk} A_i B_j \quad (10.2.4)$$

可见它是矢量 \times 在高维中的推广。

考察某些特殊 p 形式的 Hodge 对偶, 可以体会其几何内涵; 例如, 令 $A = 1$,

$$\star 1 = \frac{1}{n!} \sqrt{|g|} \epsilon_\mu dx^\mu = d\Omega \quad (10.2.5)$$

正是体积元。此外, 根据 (10.2.2) 及指标升降规则, 可得:

$$\begin{aligned} (\star A)^\mu &= \frac{1}{p!} \frac{(-1)^s}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\nu\mu} A_\nu, \\ \star A &= \frac{1}{p! q!} \frac{(-1)^s}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\nu\mu} A_\nu g_{\mu\mu'} dx^{\mu'} \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

另取 $A = dx^\rho$, ρ 是一给定指标集, 则有 $A_\nu = \delta_\nu^\rho$, 其中 δ_ν^ρ 是推广的 Kronecker-delta, 根据 ν, ρ 排列的奇偶一致性取 ± 1 或 0 。这给出:

$$\begin{aligned} \star dx^\rho &= \frac{1}{p! q!} \frac{(-1)^s}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\nu\mu} \delta_\nu^\rho g_{\mu\mu'} dx^{\mu'} \\ &= \frac{1}{q!} \frac{(-1)^s}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\rho\mu} g_{\mu\mu'} dx^{\mu'} \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

为理解这一结果之意义,不妨考察一特殊情况,即取正交曲线坐标,此时 $g_{\mu\nu}$ 仅有对角元, $\sqrt{|g|} = \prod_{\mu} \sqrt{|g_{\mu\mu}|}$, 从而:

$$\begin{aligned} \star \sqrt{|g_{\rho\rho}|} dx^{\rho} &= (-1)^s \sum_{\mu} \frac{1}{q!} \epsilon^{\rho\mu} (\text{sgn } g_{\mu\mu}) \sqrt{|g_{\mu\mu}|} dx^{\mu} \\ &= (-1)^s (\text{sgn } g_{\sigma\sigma}) \sqrt{|g_{\sigma\sigma}|} dx^{\sigma} \\ &= (\text{sgn } g_{\rho\rho}) \sqrt{|g_{\sigma\sigma}|} dx^{\sigma} \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

其中,恰当选取 σ ,使得 (ρ, σ) 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的偶排列.不难看出,这正是 $dz = \star(dx \wedge dy)$ 之推广,只是此时多出了一个 $(\text{sgn } g_{\rho\rho}) = \prod_{i=1}^p \text{sgn } g_{\rho_i \rho_i}$ 因子.

取单位正交活动标架,使得 $\omega^{\mu} = \sqrt{|g_{\mu\mu}|} dx^{\mu}$, 则上述结论可简记为:

$$\star \bigwedge_{\rho} \omega^{\rho} = (\text{sgn } g_{\rho\rho}) \bigwedge_{\sigma} \omega^{\sigma}, \quad \epsilon^{\rho\sigma} = 1 \quad (10.2.9)$$

利用此式,容易证明 $\star\star A = (-1)^{s+pq} A$.

其实也可从定义直接证明这一结论,事实上,利用 $\epsilon^{\nu'\mu} = (-1)^{pq} \epsilon^{\mu\nu'}$,

$$\begin{aligned} (\star\star A)_{\nu} &= \frac{(-1)^s}{p! q!} A_{\nu'} \epsilon^{\nu'\mu} \epsilon_{\mu\nu}, \\ &= \frac{(-1)^{s+pq}}{p! q!} A_{\nu'} \epsilon^{\mu\nu'} \epsilon_{\mu\nu} \\ &= \frac{(-1)^{s+pq}}{p!} A_{\nu'} \delta_{\nu}^{\nu'} \\ &= (-1)^{s+pq} A_{\nu} \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

对于 \mathbb{R}^3 , 总有 $(-1)^{s+pq} = (-1)^{pq} = (-1)^{0 \times 3} = (-1)^{1 \times 2} = 1$, 从而可以略去这一系数.

10.3 以外微分形式书写的 Maxwell 方程

利用 Hodge 对偶记号,可以使 Maxwell 方程进一步简化.前已给出平直时空中的方程:

$$F = dA, \quad \partial^{\mu} F_{\mu\nu} = -4\pi J_{\nu}, \quad \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -4\pi J^{\nu} \quad (10.3.1)$$

参考 Lorenz 规范下的矢量方程 $\square^2 A^{\nu} = -4\pi J^{\nu}$, 可考虑计算 A 的二阶外微分; 然而, $d^2 = 0$, 在 \mathbb{R}^3 中, 这意味着梯度场无旋, 因此并不能把 \square^2 替换为 d^2 .

事实上,利用 \star , 还可以构造出一种微分算子:

$$\star d\star: \bigwedge^p T^* \longrightarrow \bigwedge^{p-1} T^* \quad (10.3.2)$$

在 \mathbb{R}^3 中, 该算子作用在 1 形式上, 相当于取其散度; 梯度场的散度便是 Laplacian. 在此基础上, 考察四维时空中的 $\star d\star dA$, 可得:

$$\boxed{\star d\star dA = 4\pi J^b} \quad (10.3.3)$$

11 联络的基本概念与几何意义

对于弯曲流形而言,各点处的切空间互不重合;因此,为比较流形上不同点处的张量场,需要建立各切空间的联系。

有两种办法可以实现这一目的,一是通过取定一微分同胚: ϕ , 从而将后一切空间处的几何量拉回至前一切空间处进行比较;这一办法无需对流形赋予新的结构,利用这一办法定义的分运算即为李导数。

另一办法直接具体定义切空间中矢量的等价关系,这是一个新的几何结构,成为联络。联络的具体形式可以通过定义平行移动或协变导数运算得到。

11.1 矢量对易子及李导数

如果 X, Y 是坐标基,亦即可表示为 $e_\mu = \partial_\mu, e_\nu = \partial_\nu$, 则其对易子:

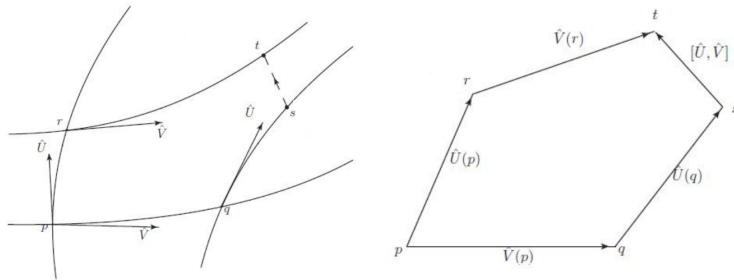
$$[X, Y] = XY - YX = \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu \equiv 0 \quad (11.1.1)$$

反之,若 $[X, Y] \equiv 0$, 则总可以重取参数 (Frobenius), 使得 $X = \partial_\mu, Y = \partial_\nu$. 对于非坐标基构成的矢量场 X, Y ——例如正交归一的活动标架而言, 则有 $[X, Y] \neq 0$.

事实上,在曲面上沿 X, Y 方向作微小平移,以 ϵ 表征平移量,记 $U = \epsilon X, V = \epsilon Y$, 有:

$$[U, V] = \Delta|_U V - \Delta|_V U + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (11.1.2)$$

$\Delta|_U$ 表示沿 U 两端的差异,如图所示;可见, $[X, Y] \neq 0$ 说明 X, Y 积分曲线无法闭合为一四边形,即 X, Y 不是坐标基底。



利用矢量的对易子 $[X, Y]$, 我们便可以将仅适用于坐标基的某些结论推广,使之适用于一般的活动标架,这将给相应几何量的定义带来极大的便利。

上述讨论存在一些漏洞,事实上,弯曲空间中矢量方向导数 V 的确切几何意义,其实并不明确。但我们知道,矢量的对易子是一种协变但不依赖联络的微分运算。事实上,矢量对易子是李导数的一种特殊情况,有:

$$[V, U] = \mathcal{L}_V U \quad (11.1.3)$$

如何一般性地定义李导数呢? 考察 p 点处的矢量场 $V(p)$, 沿 $V(p)$ 的积分曲线由方程:

$$\frac{dx^\mu(p, t)}{dt} = V^\mu, \quad x^\mu|_{t=0} = x^\mu(p) \quad (11.1.4)$$

确定。方程解的存在唯一性在数学上可以得到保证。

事实上, 矢量场 V 的积分曲线 (族) 构成了微分同胚 ϕ , $\phi(p, t)$ 即是将 p 沿积分曲线平移至 t 处。因此, 可以将 t 处的张量 T 拉回至 $t = 0$ 即 p 处, 从而考察其变化:

$$\Delta_t T = \phi^*(p, t) T(\phi(p, t)) - T(p) \quad (11.1.5)$$

相应地, 导数便可定义为:

$$\mathcal{L}_V T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_t T}{t} \quad (11.1.6)$$

如果重取坐标, 使得 V 之积分曲线即为 x^0 曲线, 则李导数具有异常简洁的分量形式:

$$\mathcal{L}_V T = \frac{\partial T}{\partial x^0} \quad (11.1.7)$$

当然, 这里的 x^0 与参量 t 应当一致。应当说明的是, 这里的 x^0, t 不一定就是时间坐标, 只是一般记号而已。在此基础上, 不难证明 $[V, U] = \mathcal{L}_V U$ 。

须注意, 李导数不仅以来一点处的 V , 还依赖 V 在邻域内的行为, 否则无法确定积分曲线。事实上, 从 $\mathcal{L}_V U = [V, U]$ 即可看出, 至少需要矢量场 V 的一阶微分信息; 此外, 有:

$$\mathcal{L}_{fX} Y = \mathcal{L}_X Y - Y[f] X \quad (11.1.8)$$

等式右侧的第二项也体现了这种依赖的影响。一般来说, 对任意张量, 有:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= X^\sigma (\partial_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}) \\ &\quad - (\partial_\sigma X^{\mu_1}) T^{\sigma \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} - \dots - (\partial_\sigma X^{\mu_r}) T^{\mu_1 \dots \mu_{r-1} \sigma}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &\quad + (\partial_{\nu_1} X^\sigma) T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\sigma \nu_2 \dots \nu_s} + \dots + (\partial_{\nu_s} X^\sigma) T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1} \sigma} \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

11.2 一般的仿射联络

下面我们采用另一办法, 即通过引入联络来比较各处的张量。事实上, 定义联络的一种最为基本的办法正是指定矢量场的协变微商 $\nabla_X Y$, 这样定义的联络称为仿射联络。要求:

1. **双线性**, 分别对应指定方向 X 与被微分矢量场 Y ;
2. **正比于方向**, 指定的方向如果差一个标量函数倍, 则该标量函数可以直接提出, 即:

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \quad (11.2.1)$$

这意味着协变微分仅依赖一点处的方向 X , 并不需要 X 在邻域内的变化信息, 这与李导数不同。

3. **莱布尼茨法则**, 张量场的标量函数倍之微分满足:

$$\nabla_X (fY) = X[f] Y + f \nabla_X Y \quad (11.2.2)$$

注意, 标量场的普通微商即是协变的, $\nabla_X f = X[f]$ 。

$\nabla_X Y$ 的几何意义也是明确的, 它给出了切空间之间的等价关系; 具体而言, 给定一点处 $U(p)$, $\nabla_V U = 0$ 给出沿 V 平行移动后的 $U(q)$.

然而, 对一般的仿射联络 ∇ 而言, 即便 X, Y 是坐标基, 也并不要求 ∇ 关于 X, Y 对称, 也就是说, 一般有:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &\neq \nabla_Y X, \\ \text{即便 } \partial_\mu e_\nu &\equiv \partial_\nu e_\mu, \text{ 也可以有 } \nabla_\mu e_\nu \neq \nabla_\nu e_\mu \end{aligned} \quad (11.2.3)$$

这一不对易性可通过挠率来衡量。

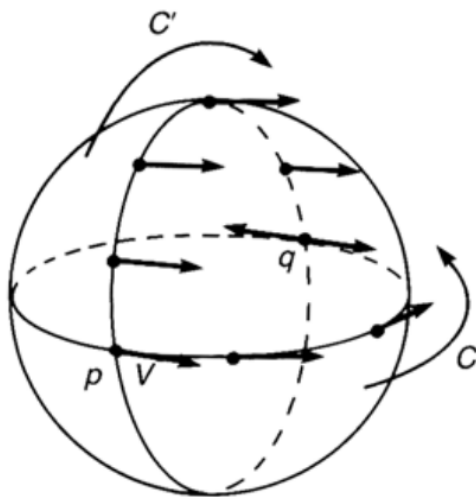
11.3 平行移动与挠率的几何意义

什么样的联络才是最为自然的呢? 可以将流形光滑嵌入到高维时空 \mathcal{M} , 将其中的矢量微分式投影到切空间上得到 $\nabla_X Y$, 也就是说,

$$\nabla_X Y = \left(\nabla_X \Big|_{\mathcal{M}} Y \right)^T \quad (11.3.1)$$

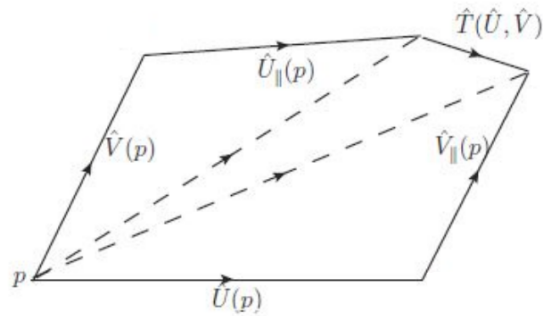
在一点的邻域内, 该联络对应的平行移动与 \mathcal{M} 中矢量的平行移动一致。再次强调, 此一致性仅对无限小平移成立。

对非无限小平移而言, 平移结果与路径有关。不妨考虑球面上沿赤道切向的某一矢量, 通过将球面嵌入 \mathbb{E}^3 获得其上的标准平行移动。



可见, 沿赤道和沿经纬线平移半周的结果恰好相反; 同时, 不难看出, 沿赤道的平移与 \mathbb{E}^3 中的平移并不一致 (see Nakahara, page 255)。但如果平移距离无限小, 两者总可以近似等同。

若 \mathcal{M} 是平直时空 $\mathbb{E}^{m,n}$, 这样得到的联络便是 Levi-Civita 联络; 若高维时空 \mathcal{M} 并不平直, 则这样得到的联络将具有非零挠率。事实上, 挠率张量 $T(U, V)$ 刻画了无限小矢量 U, V 平行移动后构成图形的不封闭程度, 如图所示:



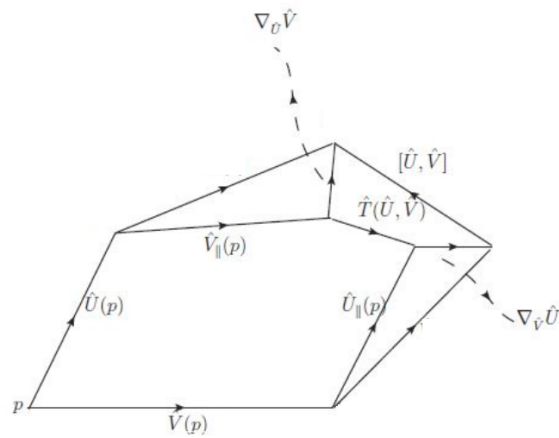
例如，定义球面上的某种非标准平行移动，使其保持切矢与经纬线的夹角，则容易看出，该平行移动将导致非零的挠率 (see Nakahara, page 255)。而对于标准的平行移动而言，由于其嵌入的空间是平坦的，总有 $U, V, U_{\parallel}, V_{\parallel}$ 构成封闭平行四边形 (see Nakahara, page 285)，因此 $T(U, V) \equiv 0$ 。

注意到，挠率的定义只依赖一点处的 X, Y ，因此必然有：

$$T(fX, gY) = fgT(X, Y) \tag{11.3.2}$$

但为了方便地将 X, Y 的平行移动结果用协变微分表出，可以取 X, Y 为区域上的矢量场。

事实上，结合 ∇ 和 $[\cdot, \cdot]$ 的几何意义，可以给出挠率基于 ∇ 的表达式，如图所示：



不难看出，

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{11.3.3}$$

12 黎曼几何的基本定理

前面我们已经证明，通过将流形光滑嵌入高维平直时空诱导得到的联络具有无挠的特性，这是最自然的一种联络。下面我们将说明，度规相容的无挠联络具有唯一性，从而可不依赖嵌入而形式化地定义 Levi-Civita 联络。

12.1 联络系数与张量的协变微分

为了具体计算的便利,下面重新回归坐标基底。根据协变导数的特性,要知道任意矢量场的协变微商,只要知道坐标基 $e_\mu \equiv \partial_\mu$ 的协变微商即可。不妨设:

$$\nabla_\mu e_\nu = e_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\xi} \langle e_\xi, \nabla_\mu e_\nu \rangle \quad (12.1.1)$$

其中 \langle, \rangle 指以 g 为度规的标准内积。由此可见,给定 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, 便完全确定了仿射联络; $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 即联络系数,它仅仅是个符号,依赖坐标选取,因此并不是个张量。

对于一般的联络而言,不要求 $\nabla_X Y$ 关于 X, Y 对称,自然便不要求 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 对指标 μ, ν 对称;事实上,对坐标基计算挠率,有:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = e^\lambda T(e_\mu, e_\nu) = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (12.1.2)$$

可见挠率给出了交换 μ, ν 引起的联络系数变动。

事实上,对不同的坐标基计算联络系数,根据莱布尼茨法则,

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = d\tilde{x}^{\lambda'} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\mu'}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\nu'}} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^{\nu'}} \right) + d\tilde{x}^{\lambda'} \left(\tilde{\partial}_{\mu'} \tilde{\partial}_{\nu'} x^\nu \right) e_\nu \quad (12.1.3)$$

等式右边的第二项仅与坐标变换有关,这表明,任给两种联络,它们对应的联络系数均不是张量,但联络系数的差值是一个张量。这是个有意思的结论。

取坐标基,注意到 $\nabla_\mu X^\nu \equiv (\nabla_\mu X)^\nu$, 而:

$$\nabla_\mu X = e_\nu \partial_\mu X^\nu + X^\nu e_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_\nu \left(\partial_\mu X^\nu + X^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \right) \quad (12.1.4)$$

可见,对任意矢量,其协变导数有分量表示:

$$\nabla_\mu X^\nu = \partial_\mu X^\nu + X^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \quad (12.1.5)$$

在此基础上,引入一形式的协变微分;注意到 $dx^\nu e_\sigma = \delta_\sigma^\nu$, 合理地定义 $\nabla_\mu \delta_\sigma^\nu \equiv 0$, 要求张量积的协变微分满足莱布尼茨法则,有:

$$\nabla_\mu dx^\nu \equiv -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda \quad (12.1.6)$$

进一步利用莱布尼茨法则,可以定义任意 (k, l) 型张量的协变微分。

12.2 度规相容条件

若流形光滑嵌入高维时空 \mathcal{M} , 则其度规 g 可视为 $g_{\mathcal{M}}$ 限制在流形上的结果,即 g 是 $g_{\mathcal{M}}$ 的诱导度规。通过这一特性,我们可以得到所谓的度规相容条件。

平直空间中,矢量内积的微分满足莱布尼茨法则,即:

$$d_{\mathcal{M}} \langle X, Y \rangle = \langle d_{\mathcal{M}} X, Y \rangle + \langle X, d_{\mathcal{M}} Y \rangle \quad (12.2.1)$$

限制在流形上, 指定微分方向 W , 则得到:

$$W\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_W X, Y \rangle + \langle X, \nabla_W Y \rangle \quad (12.2.2)$$

这便是度规相容条件不依赖坐标的表达式。

注意到, 等式右边只有两项, 而根据张量积的协变微分, 左边还有一项对度规张量的协变微分, 左右要能相等, 当且仅当度规张量的协变微分始终为零。这给出度规相容条件在坐标基下的表达式:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} \equiv 0 \quad (12.2.3)$$

12.3 Levi-Civita 联络系数的内蕴导出

给定以下条件:

1. 无挠 (torsion-free), 即 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 对指标 μ, ν 对称;
2. 度规相容 (metric-compatible), 即 $\nabla_\rho g_{\mu\nu} \equiv 0$,

可给出唯一的 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. 事实上, 直接求解度规相容方程 (组), 在过程中利用 Γ 的对称性, 即得:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (12.3.1)$$

可见, Levi-Civita 联络源于高维空间中的平行移动, 但可以通过完全不依赖嵌入的方式形式化地导出, 这一非平凡的结论称为黎曼几何的基本定理。

由此可见, 无须人为地赋予流形新的几何结构, 也可引入一种联络, 它便是 Levi-Civita 联络。后文的讨论均在 Levi-Civita 联络的基础上给出。

12.4 时空流形的对称性

利用 Levi-Civita 联络这一强有力的工具, 我们可以方便地讨论流形具有的对称性; 具体来说, 我们可以寻找可能的平移 (旋转), 使得变换前后流形的度规不变。这样的平移 (旋转) 正是所谓保距同胚。

假定 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$ 满足上述条件, 不妨取 $\delta x^\mu = \epsilon K^\mu$, K^μ 即是保距变换的生成元, 称为 Killing 矢量; 利用李导数, 不难给出它应当满足的方程:

$$\mathcal{L}_K g = 0 \quad (12.4.1)$$

利用无挠联络的对称性, 可重写张量李导数的公式, 将其中的 ∂ 全部替换为协变微分 ∇ ; 进一步, 利用度规相容特性, 可得:

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = K^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu K^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu K^\lambda) g_{\mu\lambda} = 2 \nabla_{(\mu} K_{\nu)} \quad (12.4.2)$$

这便得到了 K^μ 满足的方程:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \quad (12.4.3)$$

根据李导数的特性, 假定度规的分量 $g_{\mu\nu}$ 不显含某一坐标 x^0 , 则沿 x^0 的平移就是一 Killing 矢量。度规的平移不变性正是时空的平移不变性, 根据分析力学原理, 对自由粒子而言, 此时存在守恒的动量分量 p_0 . 对一般的 Killing 矢量 K 来说, 守恒量便是 $\langle K, p \rangle$, 这意味着, 粒子在该方向上不受引力作用。

13 测地线

13.1 测地线方程

在前述讨论的基础上, 我们可以定义沿曲线的协变微分:

$$D = dx^\mu \nabla_\mu \quad (13.1.1)$$

考虑静质量非零的自由粒子, 利用 D , 可以表达其四加速度为:

$$a^\mu = \frac{D dx^\mu}{d\tau} \quad (13.1.2)$$

几何上, $\kappa = \|a^\mu\|$ 是曲线的 (测地) 曲率; 测地线即是直线在弯曲空间中的推广, 也是自由粒子的轨迹。对一般参数 $\lambda = \lambda(\tau)$, 测地线方程为:

$$\frac{D dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\dot{\tau}}{\dot{\lambda}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (13.1.3)$$

其中 $\dot{\tau} = \frac{d\tau}{d\lambda}$. 可见, 如果 λ 是原时的仿射变换 (这称为仿射参数化), 则等式右边为零, 这便是标准的测地线方程。

利用协变微分和测地线方程, 我们可以验证前述 $\langle K, p \rangle$ 的守恒性, 有:

$$\frac{D}{d\tau} \langle K, p \rangle = \left\langle \frac{DK}{d\tau}, p \right\rangle = (u^\mu \nabla_\mu K_\nu) p^\nu = m u^\mu u^\nu \nabla_\mu K_\nu \quad (13.1.4)$$

注意 $u^\mu u^\nu$ 成分对 μ, ν 的对称性, 可将 $\nabla_\mu K_\nu$ 对称化为 $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$, $\frac{D}{d\tau} \langle K, p \rangle = 0$, 证毕。

上述讨论是在给定曲线 $x^\mu(\lambda)$, 判断其是否为测地线出发的; 若是给定初值, 求解方程:

$$\frac{D dx^\mu}{d\lambda} = 0$$

自然得测地线及其仿射参数; 此过程对零测地线同样适用, 可由此定义零测地线的仿射参数。事实上, 初值与测地线的对应关系给出了切空间到流形的指数映射 \exp .

我们可能会 naïve 地认为, 零测地线的方程可由:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0 \quad (13.1.5)$$

给出, 事实上这是不完整的。这一方程的解是所谓的零路径, 但零路径并不一定是零测地线。平直时空中光锥面上的螺旋线便是一个反例。

13.2 适用于零质量粒子的作用量

利用变分原理, 不难证明测地线便是短程线。事实上, 对赝黎曼流形中的类时曲线而言, 测地线使得原时最大, 因此称为短程线似乎名不符实; 短程实际只对类空曲线成立。

对于零质量粒子而言, $\Delta\tau = 0, m = 0$, 上述变分方法失效, 粒子的作用量:

$$S = -m\Delta\tau = -m \int_{\Omega} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \equiv 0 \times 0 = 0 \quad (13.2.1)$$

也不再实用。但是, 我们可以从这一作用量出发, 构造出一有用的新作用量。首先, 对 $m \neq 0$, 有:

$$\delta S = -m \int_{\Omega} \delta \sqrt{\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = -\frac{1}{2}m \int_{\Omega} \left|\frac{d\tau}{d\lambda}\right|^{-1} \delta \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 d\lambda \quad (13.2.2)$$

取 $e(\lambda) = \frac{1}{m} \frac{d\tau}{d\lambda} > 0$, 则作用量进一步简化为:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{-1}(\lambda) \delta \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (13.2.3)$$

上面定义的函数 $e(\lambda)$ 是一个新的独立函数, 体现了重参数化的自由度; 对零质量粒子而言, $e(\lambda)$ 是 $\frac{0}{0}$ 形式, 因此可能具有非零值。把 $e^{-1}(\lambda)$ 移至变分号内, 可得:

$$\delta S = \frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} e^{-1}(\lambda) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 (-e^{-2}(\lambda)) \delta e d\lambda \quad (13.2.4)$$

有趣的是, 第二项中的被积函数正好化简为 $m^2 \delta e$, 因此:

$$\delta S = \frac{1}{2} \delta \int_{\Omega} d\lambda \left(e^{-1}(\lambda) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - m^2 e(\lambda) \right) \quad (13.2.5)$$

我们成功地找到了一个同时适用于有质量粒子与零质量粒子的作用量, 它是:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\lambda \left(e^{-1}(\lambda) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - m^2 e(\lambda) \right) \quad (13.2.6)$$

由此获得的测地线方程:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(\frac{1}{e} \frac{de}{d\lambda} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (13.2.7)$$

不显含固有时 τ , 不必担心 $d\tau \equiv 0$. 仿射参数化条件:

$$\frac{de}{d\lambda} = 0 \iff e(\lambda) = \text{const.} \quad (13.2.8)$$

此外, 注意到作用量中并不包含 $e(\tau)$ 导数, 即 e 是没有动力学的, 只是一个辅助变量, 等价于一个约束方程。同时, 注意到一个有趣的现象: I 对应的拉氏量与经典的 $\frac{1}{2}mv^2 - V$ 具有十分相似的结构, 可以将两者进行对照、比较。

13.3 沿测地线和非测地线的标架移动

作为对上述数学知识的应用,我们考察运动参考系之标架的移动。若观测者沿测地线运动(自由落体参考系),不难猜想,其标架应当沿测地线平行移动。物理实际告诉我们,事实确实如此。

然而,若运动参考系受到引力以外的其他力,从而有非零的4-加速度,其坐标时的时间方向应当与其四速度方向一致。此时,由于参考系的运动轨迹不再是测地线,其时间方向沿轨迹不再是平行移动。这种情况下,空间方向沿轨迹的自然平移应当通过 Fermi-Walker 移动确定。

运动参考系对应的标架场实际上正是满足一定约束条件的活动标架。用 e_α 表示沿世界线的标架场,已知的约束有:

1. 基矢正交归一;
2. 时间方向 e_0 沿世界线切矢,即等于参考系的四速度;

这些条件已经可以极大地约束 e_α 的选取;若给定空间部分的转动,即可给出唯一的标架场。

一般来说,有活动标架的运动公式:

$$\frac{D}{d\tau} e_\alpha = e_\beta \Omega^\beta_\alpha \quad (13.3.1)$$

其中 Ω^β_α 可视为一矩阵,乘在基底组右边,作为旋转的生成元,表征基底组的变动。

首先, $\alpha = 0$ 的情况由参考系的四加速度给出:

$$a = \frac{Du}{d\tau} = \frac{De_0}{d\tau} \quad (13.3.2)$$

再利用正交性,有 $\langle e_0, e_i \rangle \equiv 0$, 求协变微分,得 $\frac{De_i}{d\tau}$ 的时间分量:

$$\eta^{00} \left\langle e_0, \frac{De_i}{d\tau} \right\rangle = \langle a, e_i \rangle \quad (13.3.3)$$

事实上, $\frac{De_i}{d\tau}$ 的空间分量由一个任意的转动贡献得到,有:

$$\begin{aligned} \frac{De_i}{d\tau} &= e_\alpha \eta^{\alpha\beta} \left\langle e_\beta, \frac{De_i}{d\tau} \right\rangle \\ &= u \langle a, e_i \rangle + e_j \delta^{jk} \left\langle e_k, \frac{De_i}{d\tau} \right\rangle \\ &= u \langle a, e_i \rangle + e_j \omega^j_i \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

其中 ω^j_i 是一表征空间转动的反对称张量,反对称性源于基矢的正交归一性。综上所述,有:

$$\begin{aligned} \frac{De_0}{d\tau} &= a, \quad \frac{De_i}{d\tau} = u \langle a, e_i \rangle + e_j \omega^j_i, \\ \frac{De_\alpha}{d\tau} &= -a \langle u, e_\alpha \rangle + u \langle a, e_\alpha \rangle + e_\beta \omega^\beta_\alpha \end{aligned} \quad (13.3.5)$$

若空间部分没有额外转动,即参考系不存在自转,此时标架的运动即称为 Fermi-Walker 移动。一般来说,参考系中的物理量在随之运动的过程中,均遵循 Fermi-Walker 移动;考虑随不自转的

参考系运动的四矢 v , 将其分解为分量的组合, 有:

$$v = -u\langle u, v \rangle + e_j \delta^{jk} \langle e_k, v \rangle \quad (13.3.6)$$

在该参考系中随动观测者看来, 其各分量在运动过程中不应发生变化, 从而:

$$\frac{Dv}{d\tau} = -a\langle u, v \rangle + u\langle a, v \rangle \quad (13.3.7)$$

与 e_i 满足的方程一致。这便定义了任意矢量的 Fermi-Walker 移动。

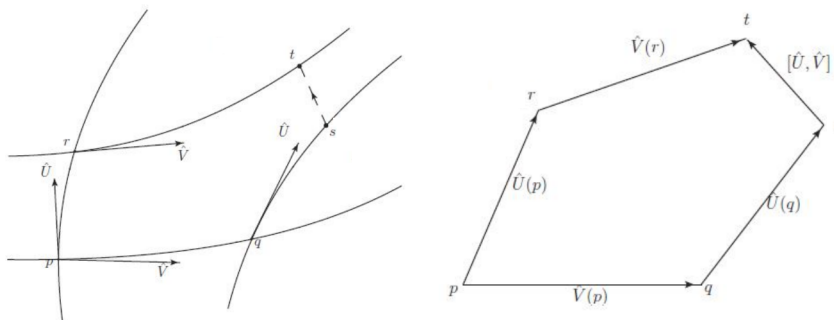
14 曲率

14.1 黎曼曲率张量及其几何意义

考虑矢量 W 沿无限小非坐标基 U, V 构成的五边形平行移动一周的结果。 W 可能发生了一个明显的转动, 其变化可以用矢量 $R(W, U, V)$ 来描述。不难看出, R 只依赖一点处的 W , 因此,

$$R(fW, U, V) = fR(W, U, V) \quad (14.1.1)$$

但为了方便地将 R 用协变微分表出, 类似 T 的定义, 我们将 W 扩充为该邻域内的矢量场。



事实上, 平行移动 $p \rightarrow q$ 之结果 $W_{\parallel|_q}$ 可以利用泰勒级数表示:

$$W_{\parallel|_q} = \left(1 - \nabla_X + \frac{1}{2} \nabla_x^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right) W(X) \quad (14.1.2)$$

从而有沿图示逆时针平移一周:

$$\begin{aligned} W_{\parallel} &= \left(1 + \nabla_U + \frac{1}{2} \nabla_U^2\right) \left(1 + \nabla_V + \frac{1}{2} \nabla_V^2\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \nabla_{[U, V]}\right) \left(1 - \nabla_U + \frac{1}{2} \nabla_U^2\right) \left(1 - \nabla_V + \frac{1}{2} \nabla_V^2\right) W + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \left(1 + [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U, V]}\right) W + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (14.1.3)$$

这便得到了平移一周的变化量 (精确到 ϵ^2):

$$\begin{aligned} R(U, V) &\equiv [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U, V]}, \\ R(W, U, V) &= R(U, V)W, \end{aligned} \quad (14.1.4)$$

前面已经说明, R 仅与一点处的 W 值有关, 即 $R(fW, U, V) = fR(W, U, V)$; 基于上述表达式, 不难证明, 对宗量 U, V 有同样的特性, 即:

$$R(fW, gU, hV) = fgh R(W, U, V) \quad (14.1.5)$$

这并不容易从定义上直接看出。由此可见, $R(W, U, V)$ 是多线性函数, 且仅与一点处的宗量有关, 可见它描述的是流形独立于矢量场的几何性质; 不难看出, $R(W, U, V)$ 的大小与流形的弯曲程度正相关, 称之为黎曼曲率张量。

为便于讨论, 延拓 U, V 使之成为坐标基, 从而 U, V 积分曲线构成封闭的四边形; 根据上述分析可知, 延拓方式并不影响 $R(W, U, V)$ 的值。注意黎曼张量的定义与挠率无关, 因此这儿的表达式甚至不要求联络是无挠的。在无挠前提下, 我们可以取测地线为坐标曲线, 此时积分曲线构成的四边形逼近平行移动构成的四边形; 我们可以重新定义 $R(U, V)W$:

$$R(U, V)W = \boxed{W \text{ 沿 } U, V \text{ 构成的平行四边形平移一周的变化}} \quad (14.1.6)$$

这一定义更加简明清晰, 但并不便于计算。

计算无挠条件下 $R(W, X, Y) \propto R(W, U, V)$ 的分量, 取坐标基, 可得:

$$\begin{aligned} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} &= g^{\lambda\xi} \langle e_\xi, R(e_\mu, e_\nu) e_\sigma \rangle \\ &= dx^\lambda R(e_\mu, e_\nu) e_\sigma \\ &= dx^\lambda \nabla_\mu \nabla_\nu e_\sigma - \boxed{\mu \leftrightarrow \nu} \\ &= dx^\lambda \nabla_\mu (e_\xi \Gamma^\xi_{\nu\sigma}) - \boxed{\mu \leftrightarrow \nu} \\ &= \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \boxed{\mu \leftrightarrow \nu} \end{aligned} \quad (14.1.7)$$

其中简记符号 $\boxed{\mu \leftrightarrow \nu}$ 指的是前面的表达式交换 μ, ν 后的结果。

14.2 黎曼张量的对称性

根据前面的讨论, 我们得到:

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = dx^\lambda R(e_\mu, e_\nu) e_\sigma, \quad R_{\lambda\sigma\mu\nu} = \langle e_\lambda, R(e_\mu, e_\nu) e_\sigma \rangle \quad (14.2.1)$$

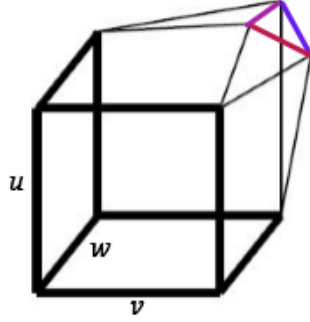
其中 $R(X, Y)$ 是一微分算符, 作用于矢量得到矢量, 作用于标量得 0。事实上, 这一现象的本质是平行移动的保距特性, 平移前后的切空间相差一旋转 (*holonomy group*)。这导致,

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)U, V \rangle + \langle U, R(X, Y)V \rangle &= R(X, Y)\langle U, V \rangle = 0, \\ R_{\lambda\sigma\mu\nu} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.2)$$

我们已经知道, $R(X, Y)$ 关于 X, Y 反对称; 根据上述讨论可见, $R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ 关于前两个指标也是反对称的。因此, 可以将 R 的指标分组, 有:

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = R_{[\lambda\sigma][\mu\nu]} \quad (14.2.3)$$

此外, 根据 (14.1.6) 给出的几何意义, 如图所示, 还有如下 Bianchi 恒等式:



$$\begin{aligned} R(U, V)W + R(V, W)U + R(W, U)V &= 0, \\ R_{\lambda[\sigma\mu\nu]} &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.4)$$

注意到, 图示 U, V, W 互相平行移动均可构成封闭的平行四边形, 这利用了无挠条件。此外, 将恒等式简写为 $R_{\lambda[\sigma\mu\nu]} = 0$, 需要利用 μ, ν 指标的反对称性。

利用 $R_{\lambda[\sigma\mu\nu]} = 0, R_{\lambda\sigma\mu\nu} = R_{[\lambda\sigma][\mu\nu]}$, 可以得到一个不可思议的结论, 那就是:

$$R_{[\lambda\sigma][\mu\nu]} = R_{[\mu\nu][\lambda\sigma]} \quad (14.2.5)$$

这并不是一个新的对称性, 而是上述对称性的导出结论。

事实上, 写出 Bianchi 恒等式的所有置换:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\sigma\mu\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma} + R_{\lambda\nu\sigma\mu} &= 0, \\ R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} &= 0, \\ R_{\mu\nu\lambda\sigma} + R_{\mu\lambda\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} &= 0, \\ R_{\nu\lambda\sigma\mu} + R_{\nu\sigma\mu\lambda} + R_{\nu\mu\lambda\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

利用反对称性重新排列指标, 使 μ, ν 尽可能靠前, λ, σ 尽可能靠后, 有:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\sigma\mu\nu} - R_{\mu\lambda\nu\sigma} + R_{\nu\lambda\mu\sigma} &= 0, \\ -R_{\mu\sigma\nu\lambda} + R_{\nu\sigma\mu\lambda} - R_{\lambda\sigma\mu\nu} &= 0, \\ R_{\mu\nu\lambda\sigma} - R_{\mu\lambda\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} &= 0, \\ -R_{\nu\lambda\mu\sigma} + R_{\nu\sigma\mu\lambda} - R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (14.2.7)$$

整理, 注意保留 $R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ 及 $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$, 自然得:

$$\begin{aligned} 2R_{\lambda\sigma\mu\nu} - R_{\mu\lambda\nu\sigma} + R_{\nu\lambda\mu\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} - R_{\nu\sigma\mu\lambda} \\ = 2R_{\mu\nu\lambda\sigma} - R_{\mu\lambda\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} + R_{\nu\lambda\mu\sigma} - R_{\nu\sigma\mu\lambda} \end{aligned} \quad (14.2.8)$$

$R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ 及 $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ 以外的其他项两两抵消, 得证。

在这些对称性的基础上, 我们可以考察 $R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ 的独立分量。首先, 根据 $R_{\lambda\sigma\mu\nu} = R_{[\lambda\sigma][\mu\nu]} = R_{[\mu\nu][\lambda\sigma]}$, 可知独立分量个数至多为:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right)$$

对 $n=2$, 可见 $R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ 只有 1 个自由度。对 $n \leq 3$, Bianchi 恒等式蕴含在上述约束当中; 对 $n \geq 4$, 还将给出额外的约束, 约束的个数为 $\binom{n}{4}$ 。从上述表达式中扣除这些自由度, 即得到 $R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ 的独立分量数目:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right) - \binom{n}{4} = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$$

代数上, Bianchi 恒等式的成立依赖 Jacobi 恒等式 (see *Nakahara*, page 269):

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (14.2.9)$$

将 X 替换为 ∇_X , 考察曲率张量对场点的函数依赖, 可得另一 Bianchi 恒等式:

$$\nabla_{[\rho} R_{\lambda\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (14.2.10)$$

可见, 上述独立分量仅是一点处数值上独立, 其对场点的依赖关系实际上并不独立。

14.3 二维流形的黎曼张量

前已说明, 二维流形的 $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$ 仅有一个独立分量。取坐标基, 不难证明, 此时的独立分量 R_{1212} 满足如下变换规则:

$$\tilde{R}_{1212} = J^{-2} R_{1212} \quad (14.3.1)$$

我们已经知道, $\det \tilde{g} = J^{-2} \det g$, 两者相除, 可得洛伦兹标量:

$$K = \frac{R_{1212}}{\det g} \quad (14.3.2)$$

在一点处取正交归一基, 有:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\sigma\mu\nu} &= R_{1212} (\delta_{\lambda\mu} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\lambda\nu} \delta_{\sigma\mu}) \\ &= K (g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu}) \end{aligned} \quad (14.3.3)$$

然而, 等式两边均为张量, 这表明该式实际上对一切标架均成立! 我们得到普适公式:

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = K (g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu}) \quad (14.3.4)$$

考察 K 的几何意义, 可见它是矢量沿单位面积区域边界平行移动一周的转角 $\Delta\phi$ 。对有限大区域, 则应当取积分:

$$\Delta\phi = \iint_{\Omega} K \, d\sigma \quad (14.3.5)$$

事实上, K 正是传说中的高斯曲率。在曲面论中, 曲面上的法矢量给出了曲面到单位球的高斯映射, 高斯曲率定义为高斯映射的面积放大率。两种定义的一致性源于 Gauss-Bonnet 定理:

$$\oint_{\partial\Omega} \kappa \, dl + \iint_{\Omega} K \, d\sigma = 2\pi \quad (14.3.6)$$

若采用 $K = \frac{R_{1212}}{\det g}$ 的定义, 则 (14.3.5) 是平凡的; 而若按曲面论的方法定义 K , 则 (14.3.5) 是非平凡的, 它是 Gauss-Bonnet 定理的直接推论。

15 曲率张量的应用和推广

15.1 截面曲率

二维曲面上一点处的曲率可用通过该点曲线的曲率来衡量。类似地, 对高维流形 \mathcal{M} , 我们可以引入截面曲率 (sectional curvature) 的概念, 它反映了流形在特定方向上的弯曲情况。

在切空间中选取二维平面 σ_p , 它是 $T_p\mathcal{M}$ 的子空间, 利用指数映射 \exp_p 可以给出该平面对应的子流形 $\exp_p \sigma_p$, 它是一个二维曲面; 所谓截面曲率 $K(\sigma_p)$, 即定义为该曲面的高斯曲率。

根据上一节的讨论, 不难给出:

$$K(\sigma_p) = \frac{R_{\lambda\sigma\mu\nu}}{g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu}} \Big|_{\sigma_p} = \frac{\langle U, R(U, V)V \rangle}{\|U\|^2\|V\|^2 - \langle U, V \rangle^2}, \quad \forall U, V \in \sigma_p \quad (15.1.1)$$

分母是基矢 U, V 张成平行四边形的面积。

须注意, $K(\sigma_p)$ 仅仅依赖平面 σ_p 的方向, $U, V \in \sigma_p$ 的选取是任意的, 只要两者线性无关, 均给出一致的 $K(\sigma_p)$ 值。常使用简记符号:

$$K(U, V) = K(\sigma_p)$$

其中宗量 (U, V) 只是表示其张成的平面, 也就是说,

$$K(U, V) = K(\alpha U + \beta V, \lambda U + \mu V), \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} \neq 0 \quad (15.1.2)$$

上面由几何的角度由二维的高斯曲率推广得到了高维的截面曲率, 下面我们将从代数的角度通过黎曼曲率张量直接提取关于曲率的部分信息, 从而得到 Ricci 曲率。

15.2 Ricci 曲率和 Einstein 张量

如同对二阶张量计算 tr 一样, 我们也可以对 $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$ 的指标进行收缩。根据指标的对称性, 我们只需考虑:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (15.2.1)$$

前者为 Ricci 张量, 后者为 Ricci 标量。同样, $R_{\mu\nu}$ 和 R 与流形的弯曲程度正相关, 是曲率的一种描述。根据 Riemann 张量的对称性, 不难看出:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (15.2.2)$$

这表明, $\text{Ric}(U, V) = dx^\lambda R(e_\lambda, V)U$ 可以看作某种度规, 甚至有“余弦定理”:

$$\text{Ric}(U, V) = \frac{\text{Ric}(U, U) + \text{Ric}(V, V) - \text{Ric}(U - V, U - V)}{2} \quad (15.2.3)$$

也就是说, 给定所有方向 V 对应的 $\text{Ric}(V, V)$, 则 $\text{Ric}(U, V)$ 可以完全确定。

在此基础上, 不妨取正交归一基, 则:

$$R_{\mu\mu} = \eta^{\lambda\sigma} \langle e_\sigma, R(e_\lambda, e_\mu) e_\mu \rangle = \sum_{\lambda \neq \mu} \eta^{\lambda\lambda} K(e_\mu, e_\lambda) \eta_{\mu\mu} \eta_{\lambda\lambda} = \eta_{\mu\mu} \sum_{\lambda \neq \mu} K(e_\mu, e_\lambda) \quad (15.2.4)$$

可见, Ricci 张量与截面曲率有密切联系。对任意方向 V , 欲知 $\text{Ric}(V, V)$, 只需任取单位正交基 $\{V, U_i\}$, 从而有:

$$\text{Ric}(V, V) = \|V\|^2 \sum_\lambda K(V, U_\lambda) \quad (15.2.5)$$

同样, 可在单位正交基下计算标量 R , 有:

$$R = \sum_\mu \eta^{\mu\mu} R_{\mu\mu} = \sum_{\mu \neq \nu} K(e_\mu, e_\nu) \quad (15.2.6)$$

可见, Ricci 曲率与截面曲率有丰富的联系。按照此文中的定义, 无论对二维黎曼流形 (度规正定) 还是对二维时空 (一种赝黎曼流形) 而言, 均有:

$$R = 2K \quad (15.2.7)$$

16 关于时空对称性的进一步讨论

前面我们引入了 Killing 矢量来描述时空的对称性; 这里我们利用曲率张量这一强有力的工具进一步分析其背后的数理意义。这一节中, K 表示 Killing 矢量而非截面曲率。

16.1 Killing 矢量场与曲率的联系

注意到, 一旦选定无挠联络, 度规 g 即决定了流形的一切内蕴几何——包括流形的联络系数和各种曲率。一般来说, 有:

$$\mathcal{L}_K g = 0 \implies \mathcal{L}_K \Gamma = 0, \quad \mathcal{L}_K R = 0 \quad (16.1.1)$$

其中 R 可以是各种曲率张量、曲率标量。下面考察这一结论的深刻意义。

首先看 $\mathcal{L}_K \Gamma = 0$. 需要说明的是, 联络系数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 并不是张量的分量, 但其变分 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 是一个张量。这是因为,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (16.1.2)$$

实际给出了一个新的联络 (一般来说, 这不是一个无挠联络)。根据联络系数在重取坐标前后的变化规律, 可知 $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 是一个张量, 这导致了 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 的张量特性, 从而有:

$$\mathcal{L}_X \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\delta X} \quad (16.1.3)$$

下面给出 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. 应当注意, 根据变分的定义, δ, ∂ 对易而 δ, ∇ 一般不对易! 比较方便的做法是从度规相容条件出发, 求解方程组, 可得:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \quad (16.1.4)$$

写成李导数形式, 即为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\nabla_\mu \mathcal{L}_X g_{\rho\nu} + \nabla_\nu \mathcal{L}_X g_{\rho\mu} - \nabla_\rho \mathcal{L}_X g_{\mu\nu}) \\ &= g^{\sigma\rho} (\nabla_\mu \nabla_{(\rho} X_{\nu)} + \nabla_\nu \nabla_{(\rho} X_{\mu)} - \nabla_\rho \nabla_{(\mu} X_{\nu)}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left([\nabla_\mu, \nabla_\rho] X_\nu + [\nabla_\nu, \nabla_\rho] X_\mu + \{ \nabla_\mu, \nabla_\nu \} X_\rho \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left([\nabla_\mu, \nabla_\rho] X_\nu + [\nabla_\nu, \nabla_\rho] X_\mu - [\nabla_\mu, \nabla_\nu] X_\rho + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu X_\rho \right) \end{aligned} \quad (16.1.5)$$

上面的计算中利用了度规张量的李导数表达式 $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 2 \nabla_{(\mu} X_{\nu)}$, 使得沿 X 的微分转化为对 X 的微分。进一步, 利用黎曼曲率张量和指标升降,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\rho] X_\nu = g_{\nu\lambda} [\nabla_\mu, \nabla_\rho] X^\lambda = g_{\nu\lambda} R^\lambda_{\xi\mu\rho} X^\xi = R_{\nu\xi\mu\rho} X^\xi = X^\xi R_{\xi\nu\rho\mu} \quad (16.1.6)$$

代入原式, 利用黎曼张量的对称性 (含 Bianchi 恒等式), 有:

$$\mathcal{L}_X \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\rho} \left(-X^\xi R_{\xi\mu\nu\rho} + \nabla_\mu \nabla_\nu X_\rho \right) = \nabla_\mu \nabla_\nu X^\sigma - R^\sigma_{\nu\mu\lambda} X^\lambda \quad (16.1.7)$$

因此, 若 $X = K$ 是 Killing 矢量场, 则有:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu K^\sigma = R^\sigma_{\nu\mu\lambda} K^\lambda \quad (16.1.8)$$

利用 $\mathcal{L}_K R = 0$, 对标量曲率 R , 注意有 $\mathcal{L}_X R = \nabla_X R = \partial_X R$, 还可得到:

$$\nabla_K R = \partial_K R = 0 \quad (16.1.9)$$

16.2 Killing 矢量场构成李代数

我们知道, $\nabla_\mu \nabla_\nu K^\sigma = R^\sigma_{\nu\mu\lambda} K^\lambda$, 即 Killing 矢量的二阶微分可以用其自身表示。把这一恒等式看作一微分方程加以求解, 或更直接地, 考虑 Killing 矢量场的 Taylor 展开, 可以得到一个深刻的结论: 邻域内的 Killing 矢量场由一点处的 Killing 矢量及其一阶微分完全确定。

对 \mathbb{R}^n , 不难猜测, 平移不变性和转动不变性贡献了所有线性无关 Killing 矢量, 数目为:

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (16.2.1)$$

事实上, 该数目正是一点处 Killing 矢量及其一阶微分之分量的线性组合具有的自由度数。这里考虑了 Killing 矢量场协变微商的反对称性, 这正是旋转生成元具有的特性。因此, n 维流形至多有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个线性无关 Killing 矢量场, 此时便称该流形具有最大对称性。

一般来说, 平移不变称为齐次 (homogeneous), 转动不变即为各向同性 (isotropic)。这是最大对称空间具有的普遍特性。

在此基础上, 还可进一步证明, Killing 矢量场的对易子仍是 Killing 矢量; 换句话说, Killing 矢量场构成李代数。利用 $\nabla_\mu \nabla_\nu K^\sigma = R^\sigma_{\nu\mu\lambda} K^\lambda$, 可以通过直接计算得到这一结论; 然而, 更为优雅的推导应当不依赖联络。事实上, 李导数具有如下基本性质:

$$[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] = \mathcal{L}_{[V, W]} \quad (16.2.2)$$

对任意张量验证这一特性无疑是非常麻烦的, 但考虑李导数对张量积遵循莱布尼茨法则, 只需对标量和矢量验证这一结论即可。对标量而言, 李导数、协变微商、偏微商一致, 上述结论是平凡的; 而对矢量而言, 考虑 Jacobi 恒等式:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (16.2.3)$$

不难上述结论; 进一步, 可自然导出 Killing 矢量场的对易子依然是 Killing 矢量场。

注意到, 曲率张量满足的 Bianchi 恒等式也源自 Jacobi 恒等式, 这也印证了 Killing 矢量场和曲率张量的内在联系。

16.3 最大对称空间的性质

下面考察最大对称空间的性质。首先, 各向同性表明, 流形沿任意方向的截面曲率相同; 因此, 原本限制在截面 σ_p 上的关系:

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = K (g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (16.3.1)$$

可以扩充到任意方向, 从而与二维情形一致。

对一般的二维流形来说, K 还依赖于位置; 而根据齐次 (即平移不变) 特性, 对最大对称空间, $K = \text{const.}$ 也就是说, 最大对称空间具有常 (截面) 曲率。当然, 根据:

$$R = \sum_{\mu \neq \nu} K (e_\mu, e_\nu) \quad (16.3.2)$$

不难得到 $R = n(n-1)K$, 即常截面曲率意味着常标量曲率。当然, 这一结论也可通过对黎曼张量指标进行两次缩并得到; 若仅缩并一次, 则得到 Ricci 张量正比于度规张量:

$$R_{\mu\nu} = (n-1)K g_{\mu\nu} \quad (16.3.3)$$

考虑最大对称空间的度规形式； $n = 1$ 的情形显然是无趣的，对于 $n \geq 2$ ，可设：

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2(\rho) d\Omega^2 \quad (16.3.4)$$

这里，为避免一大堆有碍观瞻的括号，约定 $d\Diamond^2 = (d\Diamond)^2 \neq d(\Diamond^2)$ 。

这一模式显然源自二维平面上的极坐标，沿 ρ 径向为测地线，此即测地极坐标系。其中， $d\Omega^2$ 为角向线元， $r^2(\rho) = \rho^2 + \dots$ ，高阶修正项蕴含了曲率的信息。

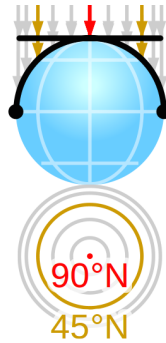
事实上， $d\Omega^2$ 正是 S^{n-1} 上的距离；任意各向同性 n 维流形可以 S^{n-1} 为基础沿径向生长出来，这在数学上称为 *Foliation*。

将此度规限制在任意截面上，可以描述二维常曲率曲面；由各向同性，对流形整体，亦有：

$$r^2(\rho) = \frac{\sin^2 \sqrt{K}\rho}{K} = \frac{\sinh^2 \sqrt{-K}\rho}{-K} \quad (16.3.5)$$

与二维曲面完全类似。

另一种确定度规的方案即通过嵌入外围空间再进行投影（将笛卡尔坐标限制在流形上）；利用球极投影，可以得到常曲率流形与平坦空间的共形关系，即得到了常曲率流形的**共形平坦性**。还可以通过正交投影的办法得到另一种常用的参数，如图所示：



这样得到的参数显然具有巨大的缺陷，它实际只能覆盖正曲率流形的一半区域。但是，其度规形式却相应比较简单；对球面，有曲率半径 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ ，从而：

$$r = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin\left(\rho / \frac{1}{\sqrt{K}}\right), \quad r^2 = G(\rho), \quad dr^2 = (1 - Kr^2) d\rho^2 \quad (16.3.6)$$

这得到度规 (*Reduced-circumference polar coordinates*):

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (16.3.7)$$

对正曲率流形，坐标奇点出现在 $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$ 即赤道上，而非南极点。

宇宙学中，常将 k, r 无量纲化；引入尺度因子 R ，使 $r \rightarrow rR$ ， $k = KR^2$ ，可得：

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (16.3.8)$$

这便是标准宇宙学 (*Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker*, 或 FRW, 或 RW) 度规的空间部分。注意这里的 R 不是标量曲率, 而是尺度因子; 有时为了区分, 也用 a 表示。一般来说, $R = R(t)$, 而其他部分对时间的依赖性则可以忽略。

17 测地偏移与曲率

这一章实际为前述讨论的继续, 我们将考察测地偏移, 并在此基础上计算测地偏移对平坦度规的影响, 从而进一步探寻曲率张量的几何意义。

17.1 测地偏移的定量描述

考虑单参数族测地线 $\gamma_s(t)$, 其中 t 是固有时或弧长; 它们构成测地线汇, 确定了所在时空的一个二维子流形。记测地线的切矢为 $T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$, 定义测地偏离矢量:

$$S^\mu = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \right|_t \quad (17.1.1)$$

不难看出, 测地偏移矢量沿测地线的变动 (事实上是二阶微分) 可以衡量时空流形的弯曲程度。

利用 (s, t) 将曲面参数化, 从而 $\{S, T\}$ 构成坐标基; 一般来说, S, T 不交, 但总可以进行正交化, 即重取 s , 使得新的 S 与 T 正交。无论 S, T 正交与否, 结合无挠条件, 总有:

$$\nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T = (\nabla_T \nabla_S - \nabla_S \nabla_T) T = R(T, S) T \quad (17.1.2)$$

上式将测地偏移与黎曼曲率张量联系在了一起, 称为测地偏离方程。写成分量形式, 有:

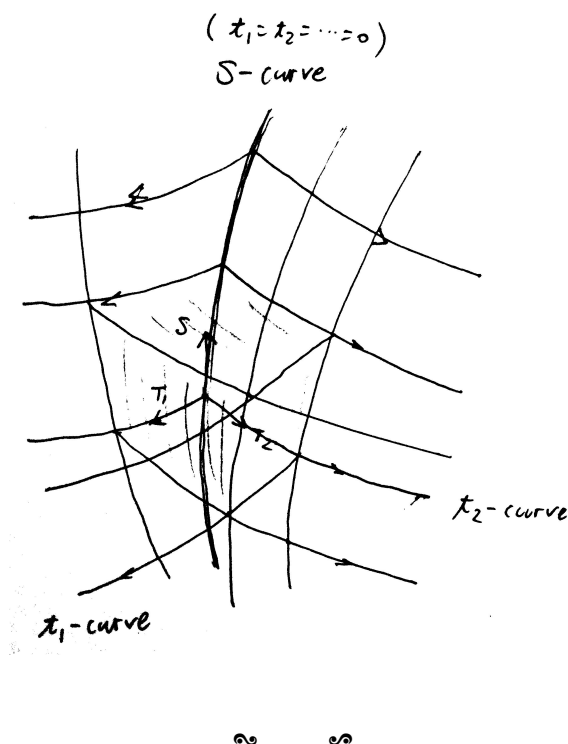
$$\frac{D^2}{dt^2} S^\lambda = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} T^\sigma T^\mu S^\nu \quad (17.1.3)$$

将测地线汇的概念稍加扩展, 即可得到一点附近的 Fermi 正则坐标 (FNC)。其构造过程如下: 任取通过点 O 的某一曲线 γ_0 为中心 s 曲线, 其切向为 S ; 选取正交径向 T_1, T_2, \dots , 我们希望沿 γ_0 各基矢没有额外转动, 即 T_i 沿 γ_0 遵循 Fermi-Walker 移动。

对特定的 i 指标, 沿 γ_0 以 T_i 为初值生成测地线汇, 构成 t^i 曲线; 用这一系列曲线将流形参数化, 得到的便是 O 点附近的 Fermi 正则坐标。

所谓“正则”, 英文为 normal, 亦有法向、正交之意。Fermi 正则坐标的正交性不止体现在原点 O 处; 事实上, 任一 s 曲线与其余坐标曲线正交, 但“离轴”的坐标曲线不保证正交, 也不一定是测地线。

上述构造意味着在原点 O 处看来, Fermi 正则坐标并不是各向同性的, 它有一特殊方向 S ; 但这实际上是非常物理的, 因为四维时空的时间方向正是一特殊方向。事实上, γ_0 可视为运动参考系的世界线; s 曲线是类时曲线, 而 t 曲线是类空曲线。这样看来, 似乎交换 s, t 记号更符合其物理意义; 以下讨论中, 重记 (s, t^i) 为 $x^\mu = (t, x^i)$ 。



更进一步，若 γ_0 缩成一点，即参考系静止在时空流形中的 O 点（显然这是非物理的），所有 x^i 曲线退化为经 O 点的径向测地线。这样的坐标便是测地极坐标 / 测地球坐标。对 O 点而言，它是各项同性的。

我们知道，在 \mathbb{R}^{n+1} 中，球坐标 $(\rho, \Omega^i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ 与标准直角坐标 x^μ 可以相互转化；将这一对应关系应用到测地极坐标 / 测地球坐标上，便得到了 O 点附近的另一种正则坐标，称为 Riemann 正则坐标 (RNC)。在 RNC 中，经过原点的测地线可以统一写作：

$$x^\mu = V^\mu t \quad (17.1.4)$$

这自然是极好的。然而，有得必有失，这一简洁性代价是原点以外的标架一般不再正交。这显然不如 FNC 方便，虽然 FNC 也不是完美的正交标架，但至少保留了更丰富的正交性。

利用 RNC，我们可以更严密地定义 FNC 坐标的类空成分。对任意点 P ，考虑沿中心 t 曲线 γ_0 之法向出发的唯一（类空）测地线段 γ_P ，使其恰抵达点 P ；记其起点为 $t = t_0$ ，长度和方向为：

$$(\rho, \Omega^k) \in \{P | t = t_0\} \quad (17.1.5)$$

将其转化为 x^i ，便得到了 FNC 坐标的类空成分。可见，FNC 坐标的类空部分正是超曲面 $t = t_0$ 上的 RNC 坐标。

17.2 曲率张量作为正则度规的二阶修正

在 Fermi 正则坐标中, 取 γ_0 为测地线, 对应物理上的自由落体参考系, 有:

$$g_{\mu\nu}|_{\gamma_0} = \eta_{\mu\nu}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_{\gamma_0} = (\nabla_\mu e_\nu)^\lambda|_{\gamma_0} = 0, \quad \partial_\lambda g_{\mu\nu}|_{\gamma_0} = 0, \quad (17.2.1)$$

其中第三式是第二式的直接推论。可见, 在理想的 (尺度无限小的) 自由落体参考系中, 时空好像是平坦的, 这正是所谓等效原理。

对 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_{\gamma_0} = 0$, 说明如下:

1. 若 μ, ν 指标之一对应 s , 则由标架沿 γ_0 平行移动, 结合无挠条件, 自然有 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda|_{\gamma_0} = 0$.
2. 若 μ, ν 指标对应坐标 t_i, t_j , 则根据 RNC 坐标的特性, 沿 γ_0 法向出发的类空测地线可表示为 $x^i = V^i t$; 结合测地线方程, 可知联络系数必定为零。

若对整个时空取 RNC 坐标, (17.2.1) 仅在原点一点处成立。

在此基础上, 考虑度规在原点 O 附近的 Taylor 展开, 有一阶级项为零。特别地, 对 RNC 坐标, 其二阶近似可由曲率张量表示。下面尝试计算 RNC 坐标中度规的二阶近似¹。

首先, 将原点和 x 用测地线段 γ_0 连接, 要求原点处的标架沿 γ_0 平行移动。这等于是在 RNC 坐标中重取了 FNC 坐标。记活动标架为 $e_\alpha = e_\alpha^\mu \partial_\mu = e_\mu e_\alpha^\mu$, 注意这里的 e_α^μ 和前述 Ω_α^β 不同, 前者表示活动标架相对坐标基的变动, 而后者为两点处活动标架之间的转动生成元 (见 (13.3.1))。

进一步, 约定:

$$e_\alpha^\mu e_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu \quad (17.2.2)$$

注意 e_ν^α 不是 (也不能) 由 e_α^μ 指标升降得到。在此基础上, 可以写出一般矢量的分量: $X^\alpha = e_\mu^\alpha X^\mu$ 。

此时, 沿 γ_0 , 测地偏移矢量 S 满足:

$$\frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu_{\lambda\sigma\nu} T^\lambda T^\sigma S^\nu \quad (17.2.3)$$

由于该活动标架实际构成 FNC 的坐标基矢, 活动标架的分量同样满足这一方程, 无需担心非坐标基的修正项; 同时, 由于沿 γ_0 联络系数始终为零, 从而协变微分退化为通常的微分, 有:

$$\frac{d^2}{dt^2} S^\alpha = R^\alpha_{\gamma\delta\beta} T^\gamma T^\delta S^\beta \quad (17.2.4)$$

若取测地极坐标 / 球坐标, 角向的坐标基自然是测地偏移矢量; 坐标变换, 便得到 RNC, 此时自然的测地偏移矢量可表示为 $S = t \partial_\nu$. 代入上式, 可得:

$$\frac{d^2}{dt^2} (t e_\nu^\alpha) = t e_\nu^\beta (R^\alpha_{\gamma\delta\beta} T^\gamma T^\delta) = t e_\mu^\alpha (R^\mu_{\lambda\sigma\nu} T^\lambda T^\sigma) \quad (17.2.5)$$

可以通过迭代的办法获得该方程的级数解, 或者说, 将 e_ν^α 视为 δ_ν^α 的微扰展开。量子力学中, 通过完全类似的方法获得含时微扰的 Dyson 级数。具体过程如下, 首先将方程表示为积分形式:

$$\boxed{e_\nu^\alpha} = \delta_\nu^\alpha + \frac{1}{t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt (R^\mu_{\lambda\sigma\nu} T^\lambda T^\sigma) t \boxed{e_\mu^\alpha} \quad (17.2.6)$$

¹参见 <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0010096>.

这里利用了 $t = 0$ 时 $e_\nu^\alpha = \delta_\nu^\alpha$, 它导致初值: $t e_\nu^\alpha = 0, \frac{d}{dt}(t e_\nu^\alpha) = 0$. 迭代, 可得:

$$\begin{aligned} e_\nu^\alpha &= \delta_\nu^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (e_\nu^\alpha)^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} (e_\nu^\alpha)^{(n)} \\ (e_\nu^\alpha)^{(n+1)} &= \frac{1}{t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt (R^\mu_{\lambda\sigma\nu} T^\lambda T^\sigma) t (e_\nu^\alpha)^{(n)} \end{aligned} \quad (17.2.7)$$

考察递归关系, 可知 $(e_\nu^\alpha)^{(n)}$ 至少具有 $\mathcal{O}(t^{2n}) = \mathcal{O}(|x|^{2n})$ 精度. 而已知 e_ν^α , 便可毫无困难地得到 $g_{\mu\nu}$. 事实上, $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e_\nu^\alpha e_\mu^\beta$, 为获得 $\mathcal{O}(|x|^2)$ 的近似, 只需保留到 $(e_\nu^\alpha)^{(1)}$ 项, 有:

$$e_\nu^\alpha = \delta_\nu^\alpha + \delta_\mu^\alpha \left(\frac{1}{t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt (R^\mu_{\lambda\sigma\nu} T^\lambda T^\sigma) t \right) + \mathcal{O}(t^4) \quad (17.2.8)$$

代入, 利用黎曼张量的对称性, 得度规的近似式:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt (R_{\mu\lambda\sigma\nu} + R_{\nu\lambda\sigma\mu}) T^\lambda T^\sigma t + \mathcal{O}(|x|^4) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \frac{2}{t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt R_{\mu\lambda\sigma\nu} T^\lambda T^\sigma t + \mathcal{O}(|x|^4) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \frac{2}{t} \cdot \frac{t^3}{6} R_{\mu\lambda\sigma\nu} T^\lambda T^\sigma + \mathcal{O}(|x|^3) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\sigma\nu} (T^\lambda t) (T^\sigma t) + \mathcal{O}(|x|^3) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\sigma\nu} x^\lambda x^\sigma + \mathcal{O}(|x|^3) \end{aligned} \quad (17.2.9)$$

综上所述, 弯曲时空度规与平坦时空度规的偏离可通过测地偏离来衡量, 而测地偏离可通过黎曼曲率张量来衡量, 因此, 度规的高阶修正可通过黎曼曲率张量表示出来. 直观上这是十分自然的, 上述过程利用严谨的计算证实了这一联系.

17.3 Ricci 张量与体积元

对上述度规的近似表达求行列式, 可得体积元 $d\Omega$ 相对标准体积元 $dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 的偏离. 如何求行列式呢? 这里介绍一个矩阵公式, 它与著名的 Cayley-Hamilton 定理有关:

$$\det(\mathbf{1} + A) = \exp \operatorname{tr} \ln(\mathbf{1} + A), \quad \|A\| < \|\mathbf{1}\| \quad (17.3.1)$$

这里不考究其背后的代数渊源, 只求证明, 可以利用 *Jacobi* 公式:

$$\delta \ln \det M = \operatorname{tr}(M^{-1} \delta M) \quad (17.3.2)$$

下面首先给出 Jacobi 公式的一个不甚严谨的推导。求变分，有：

$$\begin{aligned}
 \delta \ln \det M &= \ln \det (M + \delta M) - \ln \det M \\
 &= \ln \det (M^{-1}(M + \delta M)) \\
 &= \ln \det (\mathbf{1} + M^{-1} \delta M) \\
 &\sim \ln (1 + \operatorname{tr} (M^{-1} \delta M)) \\
 &\sim \operatorname{tr} (M^{-1} \delta M)
 \end{aligned} \tag{17.3.3}$$

这便证明了 Jacobi 公式。注意区分矩阵 $\mathbf{1}$ 与数字 1。

取 $M \rightarrow e^M = e^{t\Lambda}$ ，对 t 求变分，注意迹的相似不变性，不难得到另一著名的等式：

$$\det e^M = e^{\operatorname{tr} M} \tag{17.3.4}$$

进一步，取 $M = \ln(\mathbf{1} + A)$ ，或在 Jacobi 公式中直接取 $M = \mathbf{1} + A$ ，均可得到：

$$\det(\mathbf{1} + A) = \exp \operatorname{tr} \ln(\mathbf{1} + A) \tag{17.3.5}$$

利用这一公式，不难给出体积元系数 (*Jacobian*) 的表达式。事实上，有：

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|} &= \sqrt{-\det(\eta + h)} \\
 &= \sqrt{\det(\mathbf{1} + \eta h)} \\
 &= \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(\mathbf{1} + \eta h)\right)
 \end{aligned} \tag{17.3.6}$$

注意到， $\operatorname{tr} h$ 具有 $\mathcal{O}(|x|^2)$ 精度，因此，

$$\begin{aligned}
 \sqrt{|g|} &= \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln(\mathbf{1} + \eta h)\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \eta h + \mathcal{O}(|x|^3)
 \end{aligned} \tag{17.3.7}$$

上面的展开式中的 tr 实际上是 \mathbb{E}^4 中矩阵的迹，重记为 tr' 。在弯曲时空中，

$$\operatorname{tr} h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \tag{17.3.8}$$

考虑 $\mathcal{O}(|x|^2)$ 近似，恰有 $\operatorname{tr} h \sim \operatorname{tr}' \eta h$ 。因此，实际有：

$$\sqrt{|g|} = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tr} h + \mathcal{O}(|x|^3) \tag{17.3.9}$$

将 $g_{\mu\nu}$ 展开式带入上式，可得：

$$\begin{aligned}
 d\Omega &= d\Omega_0 \left(1 - \frac{1}{6} R_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + \mathcal{O}(|x|^3)\right) \\
 &= d\Omega_0 \left(1 - \frac{1}{6} t^2 \operatorname{Ric}(V, V) + \mathcal{O}(|x|^3)\right)
 \end{aligned} \tag{17.3.10}$$

其中， $d\Omega_0 = dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 。

可见, $\text{Ric}(V, V)$ 表征了 V 方向上的体元与标准体积元的偏离。这一现象是十分自然的, 回忆 $\text{Ric}(V, V)$ 的另一表达式, 它同样印证了 $\text{Ric}(V, V)$ 作为 V 方向上面积 / 体积修正因子的意义:

$$\text{Ric}(V, V) = \|V\|^2 \sum_{\lambda} K(V, U_{\lambda}) \quad (17.3.11)$$

第三部分 广义相对论的基本内容

18 真空场方程

18.1 测地偏离与潮汐力

前面关于测地线汇的讨论是一般性的, 且略微侧重由一点出发的类空测地线汇; 这一讨论有助于坐标选取, 但本质上是非物理的。这里我们着重考察物理的类时测地线汇, 不难发现, 它实际给出了力场中潮汐力的数学描述。

考虑以 γ_0 为中心的一族类时测地线, 它们具有类空的测地偏离矢量; 因此, 可以将指标限制为 $i, j, \dots = 1, 2, 3$, 有:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} S^i = (R^i{}_{klj} T^k T^l) S^j = (e^i{}_{\mu} R^{\mu}{}_{\lambda\sigma\nu} T^{\lambda} T^{\sigma} e^{\nu}{}_j) S^j = -K^i{}_j S^j \quad (18.1.1)$$

牛顿引力中, 记真空区域内的势函数为 $\Phi(x)$, 运动方程:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \partial_j \Phi \quad (18.1.2)$$

测地偏离 $S^i \sim \delta x^i$, 取一阶近似, 即得经典的测地偏离方程:

$$\frac{d^2}{dt^2} S^i = -\delta^{ij} S^k \partial_k \partial_j \Phi = -K^i{}_j S^j, \quad K^i{}_j = \delta^{ik} \partial_j \partial_k \Phi \quad (18.1.3)$$

可见, 对弯曲时空和牛顿引力场而言, 真空中的测地偏离方程具有一致性, 这是连接两个理论的桥梁。对牛顿引力场来说, 还有附加条件: $\nabla^2 \Phi = 0$, 这表明:

$$\text{tr} K = K^i{}_i = 0 \quad (18.1.4)$$

我们推测, 这一真空条件对弯曲时空同样成立, 这导致恒等式:

$$R_{\mu\nu} T^{\mu} T^{\nu} = 0 \quad (18.1.5)$$

前面假定, γ_0 是任意类时测地线; 而 $R_{\mu\nu}$ 并不依赖 γ_0 的选取, 因此唯一的可能便是:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (18.1.6)$$

这正是真空中的爱因斯坦方程。

注意到, $n \leq 3$ 时, Riemann 张量的独立分量数目 $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ 不多于 Ricci 张量的表观独立分量数目 $\frac{1}{2}n(n + 1)$, 而 Ricci 张量实际由 Riemann 张量缩并产生, 这意味着此时 Ricci 张量的实际独立分量数目与 Riemann 张量一致, 即 Ricci 张量完全决定了 Riemann 张量。从而,

$$R_{\mu\nu} = 0 \iff R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = 0, \quad n = \dim \mathcal{M} = 1, 2, 3 \quad (18.1.7)$$

这意味着, 只有 $n \geq 4$ 时存在非平凡 (非平直) 的时空。

我们期望, 在弱场近似与非相对论情形下, 该方程的解应当回归牛顿引力。下面分别通过近似计算和精确求解以检验这一结论。

18.2 弱场近似下的真空场方程

一般性地求解场方程 (即便是在真空中) 都是十分困难的, 这是由于方程具有明显的非线性特征。然而, 在弱场近似的条件下, 场方程可以转化为线性方程, 进而回归牛顿引力。

可设 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, 其中 $h_{\mu\nu}$ 是小量, 即:

$$h_{\mu\nu} \in \mathcal{O}(\epsilon) \quad (18.2.1)$$

一切计算都只近似到最低阶修正, 我们期待最终得一线性方程, 故弱场近似又称线性化引力。

在此基础上, 不难得到:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} h_{\mu'\nu'}, \quad (18.2.2)$$

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} (\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}), \quad (18.2.3)$$

进一步还可将各种曲率用 $h_{\mu\nu}$ 的高阶微分表示。由此可见, 线性化引力可以认为是在平坦时空中关于对称张量场 $h_{\mu\nu}$ 的理论, 正如电磁理论是关于矢量场 A_μ 的理论。

事实上, $h_{\mu\nu}$ 和 A_μ 具有惊人的相似性; 首先, 两者都具有一定的规范冗余性。考虑无限小坐标变换 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu$, 其中 $\zeta^\mu \in \mathcal{O}(\epsilon)$. 在此坐标变换下, 背景时空的主要成分依然是平坦的, 而扰动场则发生规范变换:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \mathcal{L}_\zeta \eta_{\mu\nu} \quad (18.2.4)$$

可以预期, 在这一变换下, 曲率张量是不变的: $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. 可进一步通过选定规范来简化讨论; 在电磁学中, 我们常取 Lorenz 规范: $\partial_\mu A^\mu = 0$, 这里我们考虑十分类似的调和规范:

$$\partial_\mu \partial^\mu x^\sigma = \square^2 x^\sigma = 0 \quad (18.2.5)$$

须知, 方程中的 x^σ 不是一个矢量, 它仅仅是个坐标分量。事实上, 给定指标 σ , 则 x^σ 是一函数; 对 x^σ 的微分与 x^ρ 无关, 如果 $\rho \neq \sigma$. 这意味着, 方程可直接拆分为四个独立的分量方程:

$$\square^2 t = 0, \quad \square^2 x^1 = 0, \quad \square^2 x^2 = 0, \quad \square^2 x^3 = 0, \quad (18.2.6)$$

应当强调, 调和规范并未完全固定所有的规范自由度。事实上, $\square^2 x^\mu = 0$ 正是经典的波动方程, 对满足调和规范的坐标加上任一合适的波动项, 则新的坐标依然满足调和规范。

调和规范并不仅适用于线性化引力；事实上，它可以推广到显著弯曲的时空背景上，以处理一般的张量扰动。一般来说，有：

$$\square^2 = \nabla_\mu \nabla^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \quad (18.2.7)$$

由上述讨论可知， $\nabla_\mu x^\sigma = \nabla_\mu(x^\sigma) = \partial_\mu x^\sigma$ ，与此相比，对矢量 X ，则有 $\nabla_\mu X^\sigma = (\nabla_\mu X)^\sigma \neq \nabla_\mu(X^\sigma)$ 。将算子作用到 x^σ 上，可得：

$$0 = \square^2 x^\sigma = g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_\nu(x^\sigma)) = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu x^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda x^\sigma) = -g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \quad (18.2.8)$$

通过上述计算，我们得到了调和规范的实用形式： $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$ ，它不直接依赖于坐标函数，且适用于弯曲时空。对线性化引力，则有：

$$0 = g^{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu h_\lambda^\mu - \frac{1}{2} \partial_\lambda h = 0 \quad (18.2.9)$$

利用这一关系，Ricci 张量可以简洁地表示为：

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square^2 h_{\mu\nu} \quad (18.2.10)$$

综上所述，真空场方程自然转化为度规扰动满足的波动方程：

$$\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (18.2.11)$$

这强烈地暗示了引力波的存在；而在点源周围求解上述方程，应当得到与牛顿引力一致的结果。

18.3 球对称时空的近似解

利用点源周围空间的各项同性，可以简化方程的求解。我们从一个球对称的度规 *ansatz*（德文，意为拟设，即假定，或 *educated guess*）出发，参考 (16.3.4)，有：

$$ds^2 = g_{ab}(t, \rho) dx^a dx^b + r^2(t, \rho) d\Omega^2 \quad (18.3.1)$$

指标 $a, b = 0, 1$ ，对应 (t, ρ) 坐标。由球面 $t = t_0, \rho = \rho_0$ 出发，沿与球面正交的方向延伸 (t, ρ) 坐标，可保证度规中不会出现形如 $dx^a d\Omega^k$ 的交叉项，从而使度规形式尽可能地简化。

坐标变换 $(t, \rho) \rightarrow (t, r)$ ，可得：

$$ds^2 = g_{ab}(t, r) dx^a dx^b + r^2 d\Omega^2 \quad (18.3.2)$$

(t, r) 可以正交化，从而进一步化简，得到：

$$ds^2 = g_{tt}(t, r) dt^2 + g_{rr}(t, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (18.3.3)$$

可见，只要空间具有球对称性，其度规便可用上式简洁地表示出来。这里，我们加上静态的假定，则可以进一步去掉度规分量对 t 的依赖，从而有：

$$ds^2 = g_{tt}(r) dt^2 + g_{rr}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (18.3.4)$$

事实上，度规分量不含时间坐标，只能称为一个稳态时空；这里的稳态意味着可以存在匀速稳定的运动，稳态时空的 g_{0i} 分量即表征了这种运动。但对于球对称真空解而言，稳态即意味着静态，

因为我们可以通过重取坐标（即上述 $(t, \rho) \rightarrow (t, r)$ 的正交化过程）消除掉 g_{0i} 分量，此时的度规满足时间反演不变性，这便是静态时空。

在此基础上，我们希望将度规的空间写成共形平坦的形式，从而便于与笛卡尔坐标相互转换、与平坦度规 $\eta_{\mu\nu}$ 比较，进而给出扰动 $h_{\mu\nu}$ 具有的形式。重定义 $\rho = \rho(r)$ ，考虑 $d\Omega$ 和 $d\rho, dr$ 的系数之比，可得，

$$\rho = \rho_0 \exp \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{g_{rr}} dr}{r} \quad (18.3.5)$$

从而有度规：

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt}(\rho) dt^2 + a^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \\ &= g_{tt}(\rho) dt^2 + a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad a = \frac{r}{\rho} \end{aligned} \quad (18.3.6)$$

不难看出，这一坐标变换引入了额外的自由度：对 $\rho \rightarrow k\rho$ ，度规形式不变；因此，我们可以规定 a 的渐进行为：

$$r \rightarrow \infty, \quad a \rightarrow 1 \quad (18.3.7)$$

这实际上固定了 ρ_0/r_0 ，有：

$$\begin{aligned} \rho_0 &= r_0 \exp \left(- \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{g_{rr}} - 1}{r} dr \right), \\ a = \frac{r}{\rho} &= \frac{r}{r_0} \exp \left(- \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{g_{rr}}}{r} dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{g_{rr}} - 1}{r} dr \right) \\ &= \exp \int_r^{\infty} \frac{\sqrt{g_{rr}} - 1}{r} dr \end{aligned} \quad (18.3.8)$$

综上，我们得到了稳态球对称度规应当具有的形式；其非对角元为零，且在 r 充分大时，有 $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$ 。接下来，应用弱场近似；且为简化讨论，进一步取所谓的牛顿极限，即加上缓变条件：

$$\partial_t h_{\mu\nu} / h_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad \partial_t h_{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(\epsilon^\epsilon) \quad (18.3.9)$$

且要求粒子慢速运动，即 $\frac{dx^i}{dt} \ll c$ ，或 $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$ 。

考察测地运动。注意到，测地线方程中含有 $\frac{dx^i}{d\tau}$ 的项与联络系数相乘之后均成为高阶项，可以丢弃；综合考虑缓变条件，可得：

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{tt}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad \Gamma_{tt}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{tt} \quad (18.3.10)$$

对 $\mu = 0$ ，给出 $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$ ， $\frac{dt}{d\tau} = \text{const.}$ 进一步对 $\mu = i$ ，可得：

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{tt} \quad (18.3.11)$$

我们发现，只要取 $h_{tt} = -2\Phi$ ，运动方程即与牛顿力学一致；同时，场方程等价于 $\nabla^2 h_{\mu\nu} = 0$ ，这正好给出了牛顿引力势满足的拉普拉斯方程 $\nabla^2 \Phi = 0$ 。对空间分量，同样有 $\nabla^2 h_{ii} = 0$ ；由对称

性, 同样应当有 $h_{ii} \propto \Phi$, 从而:

$$h_{tt} = -2\Phi, \quad h_{ij} = k\Phi \delta_{ij} \quad (18.3.12)$$

此时, 相对论性的引力确实与牛顿引力达成了一致, 这构成了对场方程的初步验证。

然而, 根据上述讨论, 似乎难以确定 h_{ii} 与 Φ 的比例系数。这是因为, 在上述近似中, h_{00} 与 h_{tt} 不再耦合, 因此两者的关联无法体现。通过精确求解场方程, 或考虑场源对度规扰动的贡献形式, 可以确定 k 。下面首先讨论真空场方程的精确求解。

18.4 球对称时空的精确解

上面我们在稳态 / 静态假定的基础上给出了球对称时空 (不完整的) 近似解; 事实上, 从 (18.3.3) 出发, 无须稳态假定, 也可得到一致的结果。这表明, 真空 Einstein 方程的球对称解具有唯一性, 且这一解是一个静态的时空, 这被称为 Birkhoff 定理。

从 (18.3.3) 出发, 我们预计,

$$r \rightarrow \infty, \quad g_{tt} \rightarrow -1, \quad g_{rr} \rightarrow 1 \quad (18.4.1)$$

故可设 $g_{tt} = -e^{2\alpha}$, $g_{rr} = e^{2\beta}$, 这样便自动满足了渐进条件。

代入 $R_{\mu\nu} = 0$, 我们发现, 必须有 $\beta = \beta(r)$, 且 $\alpha + \beta = g(t)$ 。因此, 总可以重取时间坐标 t , 将因子 $g(t)$ 吸收到时间坐标内, 使得:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{-2\alpha(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (18.4.2)$$

这便证明了, 球对称时空必定是静态的; 当然, 所谓静态, 实际上是对 ∞ 观测者而言的结果, 但不难看出这对有限远处的静止观测者而言 ($r = r_0$) 依然成立。在此基础上进一步求解, 不难得到著名的 Schwarzschild 度规:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 + 2\Phi)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (18.4.3)$$

方程仅能给出 $\Phi \propto \frac{1}{r}$, 与牛顿极限比较, 即可确定: $\Phi = -\frac{GM}{r}$ 。

基于 Schwarzschild 度规的计算成功解释了水星的进动, 同时给出了引力红移、光线偏折及雷达回波延迟的精准预测。这极大地验证了真空场方程。

进一步, 利用上一节给出的一般公式, 可以将度规表示为共形平坦的形式; 我们只要求达到 $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$ 精度, 从而:

$$\begin{aligned} a &= \exp \int_r^\infty \frac{\sqrt{g_{rr}} - 1}{r} dr = \exp \left(- \int_r^\infty \frac{\Phi}{r} dr \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right) \\ &= e^{-\Phi} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right) = 1 - \Phi + \mathcal{O} \left(\frac{1}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (18.4.4)$$

从而, $a^2 = 1 - 2\Phi + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$, 也就是说, 线性化的度规形式为:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (18.4.5)$$

这便搞定了上一节的遗留问题，即得到了完整的扰动张量：

$$h_{\mu\nu} = -2\Phi \delta_{\mu\nu} \quad (18.4.6)$$

19 物质告诉时空如何弯曲

前面的讨论完全基于真空场方程 $R_{\mu\nu} = 0$ ，我们得到了与实际高度吻合的结果。下面的问题在于，考虑物质分布的情况下，如何对方程进行修正，从而得到完整的引力理论。

19.1 线性化的场方程

我们依然从线性化引力出发，已知真空场方程：

$$\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (19.1.1)$$

及其在点源附近的解： $h_{\mu\nu} = -2\Phi \delta_{\mu\nu}$ 。下面我们尝试将其拓展为非齐次方程，要求其至少满足如下两个条件：

1. 点源的场应当与求解真空场方程得到的结果一致；
2. 方程不应违背局域的能动量守恒 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ 。

根据前面的讨论，我们知道，真空中的场方程与牛顿引力存在对应关系：

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad \sim \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (19.1.2)$$

而牛顿引力中的非齐次方程为 $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$ ，因此最为合理的猜想便是：

$$R_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} 4\pi GT_{\mu\nu} \quad (19.1.3)$$

暂不论上述等式正确与否，首先考察能动量张量作为场源的革命性意义——这看似是一个自然的过程，但其中隐含了一个前所未有的假定，即压强可以贡献引力。这是违背直观的，可它确是协变性的必然结果。

然而， $R_{\mu\nu} \neq 4\pi GT_{\mu\nu}$ 。这里考虑的理想场源只具有 T^{00} 分量，而显然 $h_{\mu\nu}$ 及 $R_{\mu\nu}$ 的其他对角元也非零，从而方程的解与球对称解不一致。我们尝试在满足协变条件的前提下，以 $h_{\mu\nu}$ 为基础，定义另一张量 $\bar{h}_{\mu\nu}$ ，可设：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + (\dots) \eta_{\mu\nu} h \quad (19.1.4)$$

要求 $\bar{h}_{ij} = 0$ ，即确定了待定系数 $(\dots) = -\frac{1}{2}$ 。此时， $\bar{h}_{00} = h_{00} - \frac{1}{2}h = -4\Phi$ ，得到与真空解一致的线性化场方程：

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \quad (19.1.5)$$

$\bar{h}_{\mu\nu}$ 称为迹相反的扰动，这是因为对四维时空，有：

$$\bar{h} = h - \frac{1}{2} \cdot 4h = -h \quad (19.1.6)$$

相应地， $G_{\mu\nu}$ 正是迹相反的 Ricci 张量，称为爱因斯坦张量。考虑到 $R_{\mu\nu}$ 与 $h_{\mu\nu}$ 的对应关系，我们便可复原一般的引力场应当满足的方程。

19.2 完整的 Einstein 场方程

对一般的非线性引力场，我们预计，类似有：

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (19.2.1)$$

此即考虑物质分布的爱因斯坦场方程。由弱场近似的结果可知，它自然满足前述第一个要求，即与真空解相容；对于第二个要求，即能守恒，结合 Bianchi 恒等式，可得：

$$\begin{aligned} \nabla_\nu R &= \nabla_\nu g^{\mu\sigma} g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\sigma} \\ &= g^{\mu\sigma} g^{\lambda\rho} \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma} \\ &= -g^{\mu\sigma} g^{\lambda\rho} (\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma}) \\ &= g^{\mu\sigma} g^{\lambda\rho} (\nabla_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho} + \nabla_\mu R_{\lambda\nu\rho\sigma}) \\ &= \nabla^\rho R_{\nu\rho} + \nabla^\sigma R_{\nu\sigma} \\ &= 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (19.2.2)$$

也就是说，总有 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ ，因此能量守恒条件自动得到满足！这正是我们所期待的结果。

然而，这里的讨论其实有一个微小的漏洞：度规相容条件 $\nabla_\sigma g_{\mu\nu}$ 实际上提供了一种可能性，使我们可以方程的左边加上一个与度规张量成正比的项；这一变更不会破坏能量守恒，且若比例系数 Λ 充分地小，则这一模型对太阳系行星运动的预测将和之前一致。或者说，只有当考察的尺度充分大时，这一修正才有明显的观测效应。

Λ 便是著名的宇宙学常数；含有宇宙学常数的场方程为：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (19.2.3)$$

$\Lambda g_{\mu\nu}$ 出现在方程的左边，这意味着正的宇宙学常量等效于一个普遍的斥力。如果没有 Λ ，则宇宙注定是非静态的；爱因斯坦起先意图通过 Λ 构建一个静态的宇宙，而随后哈勃发现宇宙膨胀，爱因斯坦便舍弃了这一想法。如今我们发现，宇宙竟然在加速膨胀，故重新引入正的 Λ ，以作为加速膨胀的一种描述（或解释）。

19.3 对场方程和能动量张量的一些说明

爱因斯坦方程实际上是一个高度非线性的方程组。对于四维时空，考察独立方程的数目——由对称性，可知至多有 10 个独立方程；再考虑 Bianchi 恒等式给出的 4 个约束，则至多只给出 6 个独立方程。相应地，度规场貌似具有 10 个自由度，场方程给予 6 个约束，剩余的 4 个自由度通过具体的坐标选取 / 规范固定得以确定。也就是说，度规场的 10 个分量可以分为两类：

- 6 个动力学自由度，由场方程确定；
- 4 个规范自由度，与时空几何无关，由坐标选取确定。

场方程的高度非线性源于引力场与自身的耦合；事实上，引力场本身就携带有能动量，因此可以作为自身的源。因此，广义相对论从一开始便注定是一个非线性的引力理论。

相应地，引力场以外的物质场则由能动量张量 $T_{\mu\nu}$ 描述。并不是任意的 $T_{\mu\nu}$ 均可作为场源；通常，对 $T_{\mu\nu}$ 的限制有如下几类：

1. 弱能量条件 (WEC)：所有观测者看到的能量密度都应非负，这导致 $\rho \geq 0, p \geq -\rho$ ；
2. 主能量条件 (Dominant EC)：物质能流不应超光速，这导致 $|p| \leq \rho$ 。

还有一些其他的能量条件，但上述两个是最为显然和重要的。这实际对物态方程作出了限制。

∞ ∞

可利用作用量原理给出场的运动方程。这里我们参考电磁场的作用量：

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (19.3.1)$$

其中 $d\Omega$ 为体积元；与之类比，便可得到著名的 Einstein-Hilbert 作用量：

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d\Omega R \quad (19.3.2)$$

我们期待，通过对 S_{EH} 的变分，应当自然地获得 $G_{\mu\nu}$ 的表达式；下面验证这一事实。在开始之前，须注意， $d\Omega = d^4x \sqrt{|g|}$ ，不能忽略 $\sqrt{|g|}$ 的变分之贡献。于是，有：

$$\delta(R\sqrt{|g|}) = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{|g|}) \quad (19.3.3)$$

其中， $\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \delta|g|$ ，而 $\delta|g|$ 可利用 Jacobi 公式 (17.3.2) 化简：

$$\delta \det g = (\det g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta|g| = |g| g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -|g| g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (19.3.4)$$

将其带入上式，果然，出现了 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu}$ ，

$$\delta(R\sqrt{|g|}) = \sqrt{|g|} (G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \quad (19.3.5)$$

进一步，考虑 $\delta R_{\mu\nu}$ 。将其用 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 展开，注意到 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 的张量特性，我们发现，

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (19.3.6)$$

与 $g^{\mu\nu}$ 缩并后，不难看出这是个全 (协变) 微分；由此积分转化至边界上进行，结果为零，从而该项对运动方程没有贡献，可直接丢掉；这便自然得到了标准的场方程。

须注意，我们假定边界上的积分趋零——这是一个微妙的假定，事实上需要更为细致的讨论。虽然边界项趋零在物理上大体符合直观，但这在数学上是不可能的；原因在于，边界项既包含 $g_{\mu\nu}$ ，又包含其法向微分；令上述二者的变分同时为零，等于同时取定 Dirichlet 和 Neumann 边值，只能导出平凡解。

由此可见, Einstein-Hilbert 作用量在数学上是不完善的, 必须进行修正, 以保证边值为零可以实现。不妨直接从 Einstein-Hilbert 作用量中扣掉所有边界项, 这给出 Einstein 作用量, 但此作用量本身不具协变性, 比较糟糕; 另一方案是尝试抵消边界项中的法向微商, 从而干掉 Neumann 边值成分, 得到纯粹的 Dirichlet 边值问题。著名的 Gibbons-Hawking-York 边界项便是此方案的一种实现。

无论如何, 修正后的引力场作用量 S_g 都将给出变分:

$$\sqrt{|g|} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (19.3.7)$$

从而自然给出 Einstein 张量。在此基础上, 我们可以相应地给出宇宙学常数对应的作用量:

$$S_\Lambda = \frac{1}{16\pi G} \int d\Omega (-2\Lambda) \quad (19.3.8)$$

加上这一项后, 考察变分过程, 可见其相当于使场方程中的 $R \rightarrow R - 2\Lambda$, 从而:

$$G_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda) g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (19.3.9)$$

20 运动物质与时空的耦合

在上一章中, 我们由作用量原理导出了场方程中引力场的贡献项; 对于物质场的贡献 $T_{\mu\nu}$, 尚未给出严格的解释。这里我们依然从作用量原理出发, 探讨 $T_{\mu\nu}$ 的来源及其效应。

20.1 能动量张量的定义

参见 8.2, 回顾 $T_{\mu\nu}$ 的定义, 我们发现, 它来源于 T_{ij} 结合协变性的自然推广; 显然, 它并不是一个严格定义的量, 尽管其值基本可由物理意义和协变性完全确定。

这里, 在引力场作用量 S_g 的基础上, 我们进一步考虑经典场的作用量:

$$S_m = \int d^4x \mathcal{L}_m \quad (20.1.1)$$

对 $S_g + S_m$ 变分, 我们期待得到场方程, 这一过程实际给出了 $T_{\mu\nu}$ 的严格定义:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (20.1.2)$$

对点粒子, 我们有 $S_m = -m \int d\tau$; 推广至一般的连续介质, 为简洁起见, 首先考虑狭义相对论情形, 此时取标准直角坐标, 有 $m = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t)$, 这导致:

$$S_m = - \int d^3\mathbf{x} \rho \int d\tau = \int d^4x \left(-\rho \frac{d\tau}{dt} \right) \quad (20.1.3)$$

这里的 m, ρ 分别为 (静) 质量和相应的 (静) 质量分布, 它们在洛伦兹变换下相差一个 γ 因子, 与 8.2 中的动质量分布 ρ' 不尽相同。

考虑被积函数，其在变分过程中应当展开为：

$$\left(-\rho \frac{d\tau}{dt}\right) = \left(-\rho \frac{d\tau}{dt}\right) \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = -\rho \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \quad (20.1.4)$$

等式左边的 τ 是原时参数，而等式右边的 τ 在变分后一般不再是原时参数，因此必须进行区分。为方便起见，参照电磁理论中的处理办法，引入流四矢：

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}, \quad \left(-\rho \frac{d\tau}{dt}\right) = -\sqrt{-J_\mu J^\mu} \quad (20.1.5)$$

实际上， J^μ 正是协变的四动量密度。再次强调，上述 ρ 是静质量的分布，与电荷分布类似，它并不是洛伦兹标量；但如果考虑局部的共动参考系，则：

$$\rho \frac{d\tau}{dt} \longrightarrow \rho \quad (20.1.6)$$

这样重定义得到的共动静质量分布 ρ 是一标量场，此时有 $J^\mu = \rho u^\mu$ ， $S_m = -\int d^4x \rho$ ，进一步将积分变量由 d^4x 推广到一般的 $d\Omega$ ，我们便得到了物质场的作用量：

$$S_m = -\int d\Omega \sqrt{-J_\mu J^\mu} \quad (20.1.7)$$

下面对这一作用量进行变分。应当注意，不可能保持 ρ 而对度规进行变分，否则将破坏质量守恒！类似的情况在电动力学中也出现过——在求解两根导线的相互作用力时，不能忽略电磁感应对电流的阻碍。

因此，为了方便起见，定义 $p^\mu = \rho \sqrt{|g|} u^\mu$ ，对 $\rho \sqrt{|g|}$ 整体进行变分；具体计算参见 Dirac，最终我们得到：

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \quad (20.1.8)$$

与前面给出的尘埃能动量张量一致。

20.2 慢转星体周围的时空

在上述讨论的基础上，进一步考虑非相对论极限，即 $\mathcal{O}(\frac{v}{c})$ 级近似，则 $T_{\mu\nu}$ 的非零成分为：

$$T_{0\mu} = T_{\mu 0} = \rho u_\mu = J_\mu \quad (20.2.1)$$

弱场近似下的场方程简化为：

$$\square^2 \bar{h}_{0\mu} = -16\pi G J_\mu \quad (20.2.2)$$

这一方程与 Maxwell 方程：

$$\square^2 A_\mu = -4\pi J_\nu \quad (20.2.3)$$

具有高度的相似性；事实上，完全可以平行地引入引电场、引磁场，前者由静质量分布引起，后者由运动造成。更有意思的是，相应的测地线方程也与洛伦兹力导致的运动方程完全类似。

这里, 不妨设 $\bar{h}^{0\mu} \sim (-4\Phi, \mathbf{A})$, 其中的 \mathbf{A} 满足:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}, \quad \mu = 16\pi G, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (20.2.4)$$

须注意指标升降带来的影响; 最终对度规的修正体现在 $g_{0i} = g_{i0}$ 分量上, 大小为 $A_i = -A^i$.

考虑慢转黑洞, 完全照抄电磁学中的结论, 有偶极场:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{8\pi} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{x}}{\rho^3} = \frac{2G}{\rho^3} \mathbf{J} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{x}\| \quad (20.2.5)$$

在线性化引力的框架下, 慢转星体的引力场在共转参考系中退化为 (线性化的) Schwarzschild 时空。然而, 在高速转动的情形下, 上述讨论失效, 转动星体的时空与 Schwarzschild 时空存在本质差异, 其结构须由高度非平凡的 *Kerr* 几何来描述。

取标准直角坐标, 令 z 轴与 \mathbf{J} 一致, 此时有:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{2GJ}{\rho^3} (y dx - x dy) dt \\ &= -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) - \frac{2GJ}{\rho} \sin^2 \theta d\phi dt \end{aligned} \quad (20.2.6)$$

其中, $\Phi = -\frac{GM}{\rho}$; 这是个稳态时空, 与我们的预期一致。



本文采用 [CC BY-NC-SA-4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) 许可协议。

欢迎转载, 转载需注明出处, 且禁止用于商业目的。

