cc by ¥ ⟲

曲面的微分几何

Bryan

参考：陈维桓《微分几何》，*do Carmo, Wikipedia*

1 微分形式

1.1 微分形式的定义

考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 $f(\mathbf{x})$. 几何上，f 确定了一个嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的 n 维曲面（graph）：

$$\Sigma\colon \Big\{\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) \,\Big|\, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\Big\},\quad \Sigma\longhookrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$$

考虑方向微商算子：

$$v^i\frac{\partial}{\partial x^i}:\quad f(\mathbf{x})\quad\longmapsto\quad\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}$$

上述表达式采用了爱因斯坦求和约定；作用于 f 的方向微商算子给出了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的切矢量 $\left(\mathbf{v}, v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$, 这些切矢量构成了 Σ 的 n 维切平面 $T_{\mathbf{x}}\Sigma$. $T_{\mathbf{x}}\Sigma$ 可视为线性空间，称为切空间。

由于 f 的任意性，不妨考虑更一般的算子空间 $T_{\mathbf{x}}$, 其元素为 $\left(\mathbf{v}, v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, 可用 $\mathbb{R}^n$ 中的矢量 $\mathbf{v}$ 代表之。这样便可进一步定义 $\mathrm{d}x^i : T_{\mathbf{x}}\to\mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}x^i\left(\mathbf{e}_j\right)=\delta^i_j,\quad \mathrm{d}x^i\left(\mathbf{v}\right)=v^i \tag{1.1}$$

其中 $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

可见，$\mathrm{d}x^i$ 是余切空间 $T^*_{\mathbf{x}}$ 的基底，其作用规则与 $\mathbb{R}^n$ 上的投影算子 π^i 一致。这便是（一次）微分形式的定义。实际研究中，往往直观地将 $\mathrm{d}x^i$ 视为沿 e_i 方向的线元。符号约定：为简洁起见，在不至于混淆的情况下，本文将直接用正常字体表示矢量（如 r），不再加粗（如 $\mathbf{r}$）。

1.2 外微分形式

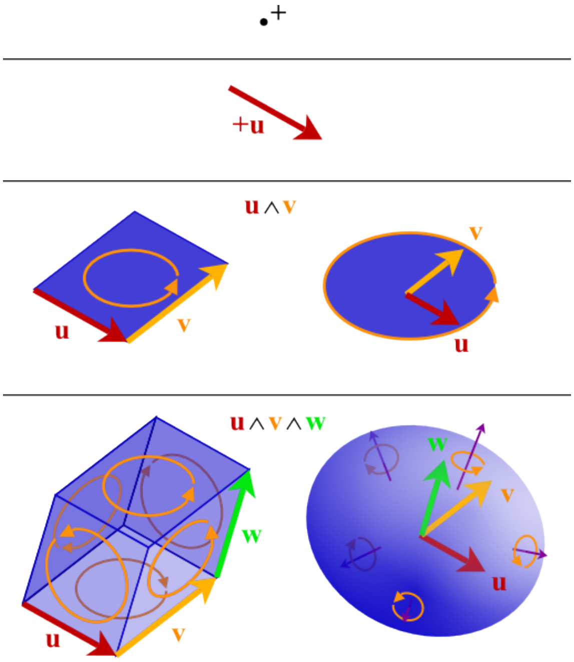
一次微分形式（1 形式）描述了 n 维空间中的线元。为了描述面元 / 体元，引入外微分形式。一般来说，p 次外微分形式（p 形式）表示 p 维面元 / 体元 $\mathrm{d}\sigma$。

为准确地描述空间的定向，外微分遵循反对称张量的运算法则。对三维空间中两矢量 (v_1, v_2) 构成的面元，考虑其在以 $+z$ 为法向的 xy 平面上之投影，应有：

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\ (v_1, v_2)=\begin{vmatrix}\mathrm{d}x\,(v_1) & \mathrm{d}x\,(v_2)\\ \mathrm{d}y\,(v_1) & \mathrm{d}y\,(v_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(v_1)_x & (v_2)_x\\ (v_1)_y & (v_2)_y\end{vmatrix} \tag{1.2}$$

将上述结论推广，一般来说，p 次微分形式（p 形式）的基底为 p 个 1 形式构成的反对称张量 $\bigwedge^p \mathrm{d}x^{i_k}$。考虑矢量组 $(v_1, \ldots, v_p)$, 有：

$$\bigwedge_{k=1}^{p}\mathrm{d}x^{i_k}\ (v_1,\ldots,v_p)=\det\Big(\mathrm{d}x^{i_k}\,(v_j)\Big),\quad k, j\text{：张量（矩阵）指标} \tag{1.3}$$



上式与 $\mathbb{E}^3$ 中的求积公式吻合，以此定义 $\mathbb{E}^n$ 中的面元 / 体元是十分自然的。所有 p 形式构成线性空间：$\bigwedge^p T^*_{\mathbf{x}}$，其维度为 $\binom{n}{p}$. 仍以三维空间中的面元为例，有 $\binom{3}{2} = 3$，如上图所示。

1.3 外微分算子

外微分算子作用于低阶微分形式上，将其转化为高阶外微分。首先，

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\,, \quad f\text{：光滑函数} \tag{1.4}$$

定义外微分算子的作用规则：若 α 是某 1 形式，例如 $\alpha_i\,\mathrm{d}x^i$，则：

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\big(\alpha_i\,\mathrm{d}x^i\big) = \mathrm{d}\alpha_i \wedge \mathrm{d}x^i = \mathrm{d}\alpha_j \wedge \mathrm{d}x^j = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \tag{1.5}$$

应小心上述计算过程中傀标的变化，有指标 $i \to j$；一般地，考虑多重指标 $I = (i_1, \dots, i_p)$，有：

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\big(\alpha_I\,\mathrm{d}x^I\big) = \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I \tag{1.6}$$

由此，可以导出乘积的外微分法则；若 α 为 p 形式，则：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) &= \mathrm{d}\big(\alpha_I \beta_J\,\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J\big) \\
&= \mathrm{d}(\alpha_I \beta_J) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J \\
&= (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + \mathrm{d}\beta_J \wedge \alpha \wedge \mathrm{d}x^J \\
&= (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^p\,\alpha \wedge \mathrm{d}\beta
\end{aligned} \tag{1.7}$$

外微分的另一重要性质为：二重外微分 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\,\cdot) = 0$. 这同样可以由上述微分法则导出：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I\right) \\ &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial \alpha_I}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^I\right) \\ &= \frac{\partial^2 \alpha_I}{\partial x^i \partial x^j}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^I\end{aligned} \tag{1.8}$$

注意到外积的反对称性：$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$, 同时，$\partial^2_{ij} = \partial^2_{ji}$, 故：

$$\frac{\partial^2 \alpha_I}{\partial x^i \partial x^j}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \frac{\partial^2 \alpha_I}{\partial x^j \partial x^i}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = 0, \quad \forall\, i, j$$

从而，$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) \equiv 0$.

需要说明的是，$\partial^2_{ij} = \partial^2_{ji}$ 看似是曲面连续性的平凡推论，但事实上与曲面嵌入的外围空间之平坦特性有关。

注意，二重外微分与通常的*二阶微分*意义完全不同；一般来说，

$$\mathrm{d}^2 f = \left(\mathrm{d}x^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 f \not\equiv 0 \tag{1.9}$$

结果是关于 $\mathrm{d}x^i$ 的二次型。由于二阶外微分恒为 0, 故此后若出现 d^2 记号，指通常的二阶微分。

1.4 外微分运算的几何意义

之所以按上述法则定义外微分运算，是为了使之满足 Stokes 定理：

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_{\Omega} \mathrm{d}\alpha \tag{1.10}$$

记 $\alpha = \alpha_I\,\mathrm{d}x^I$, 上式可展开为：

$$\int_{\partial\Omega} \alpha_I\,\mathrm{d}x^I = \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I \tag{1.11}$$

结合微积分基本定理，即可证明 Stokes 定理；Stokes 定理本身则为微积分基本定理的推广。

因此，上述定义保证了以下事实，那就是外微分运算是作用于 0 形式（*光滑函数*）上的微分运算之直接推广。如果外微分 α 表述了某一流形在某*一系列*边界上的量，则 $\mathrm{d}\alpha$ 将给出该量在边界包围的内部的变化情形。或者说，边界量 α 的变化特征 $\mathrm{d}\alpha$ 在连续性条件下将给出边界内部的描述。

下面应用微分形式的语言，给出二维曲面的基本描述。这一语言及其描述的曲面特征可以方便地推广到多维情形，用以研究所谓*黎曼流形*的微分几何。

2 二维曲面的基本特征

$\mathbb{R}^3$ 中的正则参数曲面通过非退化映射：

$$r\colon\ \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

定义。记 $(u,v) \overset{r}{\mapsto} (x,y,z)$, 要求 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} \neq 0$, 即 $\operatorname{rank} \nabla r \neq 0$, 即：

$$r_u \times r_v \neq 0$$

此时，$r\colon\ \mathcal{D} \longrightarrow \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ 为局部微分同胚，或称为浸入（immersion）。为便于书写，且便于推广到高维情形，记 $\left(u^1,u^2\right) = (u,v)$, 同时 $\left(r^1,r^2,r^3\right) = (x,y,z)$.

2.1 曲面上的长度、角度与面积

通过曲面的第一基本形式表征曲面上的长度，有：

$$\mathrm{I} \equiv (\mathrm{d}r)^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}r^i\,\mathrm{d}r^j = \delta_{ij}\left(\frac{\partial r^i}{\partial u^\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha\right)\left(\frac{\partial r^j}{\partial u^\beta}\,\mathrm{d}u^\beta\right) = \underbrace{\left(\delta_{ij}\frac{\partial r^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial r^j}{\partial u^\beta}\right)}_{g_{\alpha\beta}}\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta \tag{2.1}$$

张量 $g_{\alpha\beta}$ 称为曲面的度量，它具有多重的意义：

1. 在某一点 p 处，定义二次型 $\mathrm{I}_p(X,Y) = g_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$, 易验证 $\mathrm{I}_p(X,Y)$ 是 p 处切空间上的内积。其中，X^α, Y^β 是切矢量 X,Y 在局部坐标系 $(p\,;r_u,r_v)$ 中的分量。

2. I_p 与 p 的函数关系确定了一个弯曲的二维空间（流形），曲面 Σ 是该流形嵌入 $\mathbb{R}^3$ 中的形象化表示。

事实上，$r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$, 因此可直观地将 $\frac{\partial}{\partial u}$ 看作切矢量，而 $\mathrm{d}u$ 则是 $\mathrm{d}r$ 在基底 $\frac{\partial}{\partial u}$ 下的坐标。$\mathrm{d}u$, $\frac{\partial}{\partial u}$ 互为对偶。为简单起见，常略去下标 p, 直接将第一基本形式记为 I.

曲面上的曲线可以通过 $s \xrightarrow{\gamma} \mathcal{D} \xrightarrow{r} \Sigma$ 表示，记两相交曲线在交点处的微元为 $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\tilde{r}$, 则：

$$\cos\angle(\mathrm{d}r\,,\mathrm{d}\tilde{r}) = \left\langle\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\mathrm{d}s}\right\rangle = \mathrm{I}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\mathrm{d}s}\right) \tag{2.2}$$

s 是两曲线的弧长参数。

利用矢量积与标量积的关系，可以导出面积微元的大小；利用外积 $\wedge$, 可将 $\mathrm{d}\sigma$ 形式地表示为：

$$\mathrm{d}\sigma = \|r_u \times r_v\|\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \tag{2.3}$$

可以证明，上述几何量的形式在参数变化下不变。

在上面的记号中，(g_{ij}) 意指张量 g_{ij} 的矩阵表示。对于二阶张量来说，其矩阵表示是方便可行且较为形象的。在不至于混淆的情形下，简记矩阵 $(g_{ij}) = g$.

2.2 切矢量场的正交化

考虑函数关系 $r_u = r_u(u, v)$, 可见 r_u 定义了 Σ 上的一个切矢量场。r_v 亦然。微分方程的理论告诉我们，给定 Σ 上的任意线性无关矢量场 (a, b), 总可以找到适当的积分因子，使点 p 邻域内的曲面重新参数化，从而：

$$r_{\tilde{u}} \mathbin{/\!/} a, \quad r_{\tilde{v}} \mathbin{/\!/} b$$

不妨取 (a, b) 为 Schmidt 正交化后的 (r_u, r_v), 则 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 对应的参数曲线网是正交的。重记新参数为 (u, v), 则此时第一基本型简化为：

$$\mathrm{I} = \|r_u\|^2 (\mathrm{d}u)^2 + \|r_v\|^2 (\mathrm{d}v)^2$$

3 曲面间的对应

考察参数曲面的定义 $r\colon\ \mathcal{D} \longrightarrow \Sigma$, 这实际上描述了平面区域 $\mathcal{D}$ 到曲面 Σ 的一个充分光滑的对应。一般地，考虑曲面 Σ 和 $\widetilde{\Sigma}$, 考察它们之间的对应 $\sigma\colon\ \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$, 若 $p \mapsto \tilde{p}$, 则可通过 σ 诱导两处切空间上的映射 $\mathrm{d}\sigma$，称为前推（pushforward, 又记作 σ_*）。

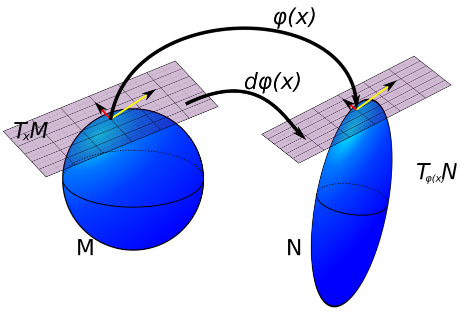
$$\begin{tikzcd}
T\,\Sigma \arrow[r, "\mathrm{d}\sigma"] \arrow[d, "\pi_\Sigma"'] & T\,\widetilde{\Sigma} \arrow[d, "\pi_{\widetilde{\Sigma}}"] \\
\underset{(u,v)}{\Sigma} \arrow[r, "\sigma"] & \underset{(\tilde{u},\tilde{v})}{\widetilde{\Sigma}}
\end{tikzcd}$$

切空间的映射——前推

定义 $\mathrm{d}\sigma$, 使得 Σ 上曲线 γ 与对应的 $\widetilde{\Sigma}$ 上曲线 $\tilde{\gamma}$ 的切向一致，则：

$$\mathrm{d}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}, \qquad \sigma_*(r_u, r_v) = (\tilde{r}_{\tilde{u}}, \tilde{r}_{\tilde{v}})\left(\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)}\right) \tag{3.1}$$

直观的图像如下所示。若 Σ 是平直空间 $\mathcal{D}$，则 $\mathrm{d}\sigma$ 正是多元微积分中定义的导映射。



上面的记号中，Jacobian 矩阵 $\left(\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right) = \nabla\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}$, $\nabla = (\partial_u, \partial_v)$ 为行矢量。一般地，对 $T\Sigma$ 中以坐标 X 表示的矢量, 有以下关系：

$$\sigma_*(X) = \mathrm{d}\sigma\left(X^\alpha\partial_\alpha\right) = \tilde{\partial}_\beta \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\alpha} X^\alpha = \left(\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right)X \tag{3.2}$$

$\left(\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right)X$ 正是前推矢量在 $T\widetilde{\Sigma}$ 中的坐标表示。可类似地定义拉回 σ^*：$T^*\widetilde{\Sigma} \longrightarrow T^*\Sigma$. 有：

$$\sigma^*(\mathrm{d}\tilde{u}^\beta) = \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha$$

事实上，如果不考虑严谨性，由一阶微分形式不变性，可以直接书写：

$$\mathrm{d}\tilde{u}^\beta = \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\beta}$$

但由于 $\mathrm{d}\tilde{u}, \mathrm{d}u$ 实际生活在不同的线性空间中，$\tilde{\partial}, \partial$ 亦然。因此有必要定义前推和拉回。

若 σ 是微分同胚，则可利用前推、拉回实现曲面的重新参数化。实际上，我们有两种等价的方式来定义坐标变换：微分同胚是“主动”坐标变换，而传统的坐标变换是“被动的”。考虑一个 n 维流形 M，具有坐标函数 x^μ. 为了变换坐标，我们要么简单地引进另一个坐标函数 y^μ, 即保持流形不变而改变坐标映射；要么我们引进一个微分同胚，使原来的坐标被拉回从而定义新坐标，也就是说在流形上移动点，而考虑新点的坐标。

3.1 保长对应与保角对应

保长对应，意味着 $\mathrm{I}(X,X) \equiv \mathrm{I}(X) = \tilde{\mathrm{I}}\left(\sigma_*(X)\right)$. 这表明：

$$g = J^{\mathrm{T}}\tilde{g}J \tag{3.3}$$

其中 J 为 Jacobian 矩阵，g 是 $g_{\alpha\beta}$ 的矩阵表示, $\tilde{g}$ 亦然。

用微分形式书写，则：

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta \\
&= \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha}\,\tilde{g}_{ij}\,\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta}\right)\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta \\
&= \tilde{g}_{ij}\left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha\right)\left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta}\,\mathrm{d}u^\beta\right) \\
&= \tilde{g}_{ij}\,\sigma^*\left(\mathrm{d}\tilde{u}^i\right)\sigma^*\left(\mathrm{d}\tilde{u}^j\right) \\
&\equiv \sigma^*\tilde{\mathrm{I}}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

即保长对应的条件可简写为：

$$\sigma^*\tilde{\mathrm{I}} = \mathrm{I} \tag{3.5}$$

类似地，保角对应的条件则可以表示为：

$$\sigma^*\tilde{\mathrm{I}} = \lambda^2\mathrm{I} \tag{3.6}$$

保角对应常称作共形。

任两个正则参数曲面的局部共形是普遍存在的。事实上，任意二维的正则参数曲面都可在局部与平面建立共形对应，对应关系的寻找可化为柯西—黎曼方程的求解，再进而化为拉普拉斯方程的求解。由偏微分方程理论可得解的存在性。

3.2 高斯映射

考察曲面 Σ 上的单位法矢量场：

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

n 可以视为 $\Sigma \longrightarrow S^2$ 的光滑映射，称为高斯映射。可以猜想，$\mathrm{d}n$ 反映了曲面的弯曲程度。

根据 n 选取 S^2 上的适用参数系 (u, v), 此时 n 相当于恒同映射。利用 (3.1), 将 $r, \tilde{r}$ 置于相同的 $\mathbb{R}^3$ 空间中，可得：

$$n_*(r_u, r_v) = (\tilde{r}_u, \tilde{r}_v) = (n_u, n_v) \tag{3.7}$$

球面 S^2 具有很好的一个特性：$\tilde{n} = \tilde{r}$, 因此 $\tilde{n} = n$, 切平面 $T_p\Sigma$ 与 $T_{g(p)}S^2$ 平行，可以自然地等同起来。从而，n_* 可以方便地用矩阵形式表示，记之为 W, 则有：

$$(n_u, n_v) = (r_u, r_v)\, W \tag{3.8}$$

事实上，W 完整地描述了曲面局部的弯曲情况。有：

$$n_\beta = r_\gamma\, \delta^{\gamma\alpha}\, \langle r_\alpha, n_\beta \rangle = r_\gamma W^\gamma_{\ \beta} \tag{3.9}$$

4 曲面弯曲的描述

4.1 曲面局部的近似方程

将曲面 $r(u, v)$ 在点 p 的局部展开，有：

$$\Delta r = \mathrm{d}r + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 r + \cdots \tag{4.1}$$

不妨记 $\mathrm{d}\rho = (\mathrm{d}u\,, \mathrm{d}v)^{\mathrm{T}}$, 则：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r &= \mathrm{d}u^\alpha\, \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} = \left(\nabla r|_p\right) \mathrm{d}\rho\,, \\ \mathrm{d}^2 r &= \left(\mathrm{d}u^\alpha\, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\, \mathrm{d}u^\alpha\, \mathrm{d}u^\beta = (\mathrm{d}\rho)^{\mathrm{T}} \left(\nabla^{\mathrm{T}} \nabla r|_p\right) (\mathrm{d}\rho) \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中，$\nabla^{\mathrm{T}} \nabla r$ 为 Hessian 矩阵。

回顾第一基本形的定义：

$$\mathrm{I} = (\mathrm{d}r)^2$$

下面定义第二基本形：

$$\mathrm{II} = \mathrm{d}^2 r \cdot n \tag{4.3}$$

它们分别对应 (4.1) 的线性项和二次项。事实上，取局部标架 $\{p; r_u, r_v, n\}$, 曲面的方程为：

$$z = \Delta r \cdot n = \frac{1}{2}\,\mathrm{II}(X)|_{X=(x,y)} + \cdots \tag{4.4}$$

跟 W 类似，II 描述了曲面局部的弯曲情形。据 $\mathrm{d}^2 r$ 的定义，有：

$$\mathrm{II} = \langle r_{\alpha\beta}, n\rangle \,\mathrm{d}u^\alpha \,\mathrm{d}u^\beta = b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta \tag{4.5}$$

注意到，$0 = \langle r_\alpha, n\rangle = \partial_\beta \langle r_\alpha, n\rangle = \langle r_{\alpha\beta}, n\rangle + \langle r_\alpha, n_\beta\rangle$, 结合 (3.9), 可得：

$$\begin{gathered} W^\gamma_{\ \beta} = -g^{\gamma\alpha} b_{\alpha\beta} = -b^\gamma_{\ \beta}, \\ \mathrm{II} = \mathrm{d}^2 r \cdot n = -\,\mathrm{d}n \cdot \mathrm{d}r = -n_*(\mathrm{d}r)\cdot \mathrm{d}r \end{gathered} \tag{4.6}$$

可见，将第二基本量 b 用 g 单位化，再加一负号，即得 W. 写成矩阵形式，

$$W = -g^{-1} b \tag{4.7}$$

也就是说：

$$\mathrm{II}\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = \frac{\mathrm{II}\,(X)}{\mathrm{I}\,(X)} = -\frac{\mathrm{I}(X, WX)}{\mathrm{I}\,(X,X)} \tag{4.8}$$

负号可以通过如下例子来理解：考虑半径为 $\frac{1}{\kappa}$ 的球面，在其上点 p 处建立局部坐标系，取外法向为 z 轴，有球面方程：

$$z = -\frac{1}{2}\kappa\big(x^2 + y^2\big) + \cdots \tag{4.9}$$

即 $\mathrm{II} = -\kappa\Big((\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2\Big)$. 而显然有 $W = \begin{pmatrix}\kappa & \\ & \kappa\end{pmatrix}$, 两者差一负号。

4.2 曲面定向对基本量的影响

若对 Σ 作一参数变换：$(u,v)\to(\tilde u,\tilde v)$, 易知 g 和 $\tilde g$ 差一合同变换；对于 $b, \tilde b$, 是否有类似的关系呢？事实上，

$$\begin{gathered} r_{\tilde u}\times r_{\tilde v} = \det\left(\frac{\partial(\tilde u,\tilde v)}{\partial(u,v)}\right) r_u \times r_v, \\ \tilde n = n \,\operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial(\tilde u,\tilde v)}{\partial(u,v)}\right) \end{gathered} \tag{4.10}$$

若等式右边的行列式为正，则 $\tilde n = n$, 根据 b 的定义，可知 $b, \tilde b$ 确实差一合同变换；若等式右边的行列式为负，则这一参数变换改变了曲面的定向，此时 $\tilde b$ 与 b 不仅差一合同变换，还差一符号。

4.3 曲面的各种曲率

一般情况下，$r_{uv} = r_{vu}$, 而：

$$\langle r_\alpha, n_\beta \rangle = -\langle r_{\alpha\beta}, n \rangle = -\langle r_{\beta\alpha}, n \rangle = \langle r_\beta, n_\alpha \rangle = \langle n_\alpha, r_\beta \rangle$$

即 n_* 是自伴算符，W 是对称矩阵。W 总有 $\dim\Sigma$ 个实特征值，记为 κ_i, 称 κ_i 为 Σ 的主曲率。

在不改变定向的参数变换下，容易验证，W 和 $\widetilde{W}$ 之间差一相似变换，$\{\kappa_i\}$ 不变。因此 κ_i 是几何量，与参数选取无关（但与曲面定向有关）。

考虑由 $\{\kappa_i\}$ 构成的对称多项式，定义：

$$\begin{aligned} &\text{平均曲率：} H = \overline{\kappa} = \frac{1}{\dim\Sigma}\operatorname{tr} W, \\ &\text{高斯曲率：} K = \prod_i \kappa_i = \det W, \end{aligned} \tag{4.11}$$

它们都是几何量；平均曲率还常简称为中曲率。二维的情形下，K 与定向选取无关。

K, H 都有明确的几何意义。事实上，$|K|$ 是高斯映射的面积放大率：

$$\mathrm{d}n(\sigma) = \|n_u \times n_v\| \,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = |K| \|r_u \times r_v\| \,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = |K| \,\mathrm{d}\sigma \tag{4.12}$$

$K < 0$ 意味着高斯映射改变了面元的定向。相应地，$2H = \frac{\delta A}{\delta V}$, 其中 δA 为面积的变分，δV 为曲面所围体积的变分。取 $\delta r = n\,\delta l$, 证明如下：

$$\begin{aligned} A = \int_{\mathcal{D}} \|\xi\| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v\,, \quad \xi = r_u \times r_v, \\ \therefore\ \delta A = \int_{\mathcal{D}} \delta\|\xi\| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{4.13}$$

而 $\frac{\delta\|\xi\|}{\delta l} = \frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot \frac{\delta\xi}{\delta l} = n \cdot \frac{\delta\xi}{\delta l}$, 考察 $\Delta\xi$ 含法向分量的线性部分，有：

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \tilde{r}_u \times \tilde{r}_v - r_u \times r_v \\ &= (r + n\,\delta l)_u \times (r + n\,\delta l)_v - r_u \times r_v \\ &= (r_u \times n_v + n_u \times r_v)\,\delta l + \cdots \end{aligned} \tag{4.14}$$

$(\cdots)$ 中包含纯粹的切向分量，以及 δl 的高阶成分，均可忽略，可得：

$$\begin{aligned} \delta\|\xi\| = \delta\xi \cdot n &= \delta l\,(r_u \times n_v + n_u \times r_v) \cdot n \\ &= \delta l\left(r_u \times W_2^2 r_v + W_1^1 r_u \times r_v\right) \cdot n \\ &= \delta l\,(\operatorname{tr} W)\,(r_u \times r_v) \cdot n \\ &= 2H\,\delta l\,\|\xi\| \end{aligned} \tag{4.15}$$

因此，

$$\delta A = 2H\,\delta l \int_D \|\xi\| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = 2HA\,\delta l = 2H\,\delta V \tag{4.16}$$

5 曲面上的微分

5.1 自然标架的运动公式

考虑曲面上的局部标架 $\{p\,; r_u, r_v, n\}$, 我们已经知道:

$$n_\beta = r_\gamma W^\gamma_\beta = -b^\gamma_\beta r_\gamma \tag{5.1}$$

从标架运动的角度看此公式，可见其描述了基矢 n 的运动，称之为 Weingarten 公式。

类似地，考察 r_u, r_v 的微商, 有:

$$r_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma + b_{\alpha\beta} n \tag{5.2}$$

这是 Gauss 公式，$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 是仅与第一基本形有关的系数。

事实上，有:

$$\begin{gathered}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\xi}\,\langle r_\xi, r_{\alpha\beta}\rangle,\\ \Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \langle r_\gamma, r_{\alpha\beta}\rangle,\end{gathered} \tag{5.3}$$

注意到，$g_{\alpha\beta} = \langle r_\alpha, r_\beta\rangle$, 因此，

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \tag{5.4}$$

5.2 协变微分

根据 Gauss 公式，有:

$$r_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma + b_{\alpha\beta} n \tag{5.5}$$

当我们只关注曲面的内蕴几何时，等号右边的第二项是无关紧要的；此时，考察投影:

$$r^{\mathsf{T}}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma$$

这称为 r_α 沿参数曲线的协变微商。

进而，对任意切矢量场 $X = x^\gamma r_\gamma$, 有协变微分:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}X = (\mathrm{d}X)^{\mathsf{T}} &= \mathrm{d}x^\alpha\, r_\alpha + x^\alpha (\mathrm{d}r_\alpha)^{\mathsf{T}}\\ &= \mathrm{d}x^\alpha\, r_\alpha + x^\alpha r^{\mathsf{T}}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\beta\\ &= \left(\mathrm{d}x^\gamma + x^\alpha \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\beta\right) r_\gamma\\ &= \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial u^\beta} + x^\alpha \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right)\mathrm{d}u^\beta\, r_\gamma\end{aligned}$$

由此定义切矢量场（分量）沿参数曲线的协变微商:

$$\nabla_\beta\, x^\gamma = \frac{\partial x^\gamma}{\partial u^\beta} + x^\alpha \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \tag{5.6}$$

上式中，第一项正是普通的微商，而第二项则是标架变动引起的修正项。对矢量场而言，协变微商与普通偏微商的区别在于，前者是几何量，与参数选取无关；后者虽形式简洁，但由于矢量场的分量与参数选取相关，其偏微商自然也与参数的选取相关，并不具有明确的几何意义。

给定曲线 $r=r(t)$, 曲线的切向 $\alpha=\alpha^\gamma r_\gamma$, 自然有沿 $r(t)$ 的协变微商：

$$\frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}t}\left(\nabla_\beta\, x^\gamma\right)r_\gamma$$

或以分量表示矢量（Einstein），

$$\frac{\mathrm{D}x^\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}t}\ \nabla_\beta\, x^\gamma \tag{5.7}$$

可见，$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ 是方向微商满足协变要求下的推广，∇_β 是作用于矢量场的协变梯度算子，作用结果是个二阶张量。而对于曲面上的标量场 f, 有 $\nabla_\beta=\partial_\beta$, 不存在标架变动引起的修正。

利用协变微商，可以将平面上的平行概念推广到一般的曲面上。称矢量场沿 $r(t)$ 平行，当且仅当 $\frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{d}t}=0$. 由此，还可以根据一点处的矢量 X_0 构造出沿 $r(t)$ 的平行矢量场 $X|_{r(t)}$.

5.3 切空间上的联络

前面已经说明，根据协变微分等于零这一条件，可以沿曲线 $r(t)$ 构造出 X_0 的平行切矢量场 X. 这一过程称为切矢量的平行移动（parallel *transport* / translation）。

根据协变微分的定义可知，切矢量平行移动的结果仅仅与曲线及切空间有关；指定曲线 γ, 则协变微商定义在切丛 $\left\{T_p\Sigma\,|\,p\in\gamma\right\}$ 上。切丛以外的区域对协变微商没有影响。

切矢量的平行移动确立了切空间 $T_q\Sigma$ 与 $T_p\Sigma$ 之间的一种自然的联络（connection），这种联络使得我们可以比较不同切空间中的量。一般来说，$Y|_q, Y|_p$ 之间的运算是没有意义的，因为两者处在不同的切空间中；而平行移动则建立了 $T_q\Sigma$ 与 $T_p\Sigma$ 之间的一种等价关系：

$$P\colon\ T_p\Sigma\longrightarrow T_q\Sigma$$

P 是等距线性同构，这意味着 $P\in\mathrm{O}(2)$; 对可定向曲面，进一步有 $P\in\mathrm{SO}(2)$.

此时，取 $q\to p$, γ 为一闭合曲线，则：

$$\mathrm{Hol}_p=\left\{P_\gamma\colon\ T_p\Sigma\longrightarrow T_p\Sigma\ \middle|\ \forall\ \gamma\right\}$$

是 SO(2) 的子群（即 *holonomy group*）。

前述通过切矢量平行移动导出的联络称为 Levi-Civita 联络。切矢量的平行移动是由协变微商导出的，由此类推，切丛上的联络一般可通过微分算子 ∇ 或微分形式 $\mathrm{D}x^\alpha$ 具体地表示出来。

由于微分运算的线性特性，可以考察微分算子作用到基底上的结果，其系数便是联络系数。Levi-Civita 联络的联络系数正是 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, 这是因为，

$$\nabla_\beta\, r_\alpha=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma \tag{5.8}$$

如果使 ∇_γ 与 x^γ 缩并，则得到曲面上的散度：

$$\nabla_\gamma\, x^\gamma \equiv \nabla \cdot X \tag{5.9}$$

取正交标架，则有 $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\alpha}\delta^\alpha_\beta$, 从而：

$$\begin{aligned}\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} = g^{\gamma\xi}\langle r_\xi, r_{\alpha\gamma}\rangle &= \sum_\gamma g^{\gamma\gamma}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\gamma\gamma}}{\partial u^\alpha} = \sum_\gamma \frac{1}{2g_{\gamma\gamma}}\frac{\partial g_{\gamma\gamma}}{\partial u^\alpha} = \sum_\gamma \frac{\partial \ln\sqrt{g_{\gamma\gamma}}}{\partial u^\alpha}\\ &= \frac{\partial \ln\sqrt{\det g}}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial\sqrt{\det g}}{\partial u^\alpha}\end{aligned}$$

进而，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot X = \nabla_\gamma\, x^\gamma &= \partial_\gamma x^\gamma + \frac{x^\gamma}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial\sqrt{\det g}}{\partial u^\gamma}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(x^\gamma\sqrt{\det g}\right)\end{aligned} \tag{5.10}$$

6 曲面上的活动标架

前面采用的自然标架是所谓*活动标架*的特例。一般来说，活动标架可以与参数系仅保持*松弛*的关系，此时考虑标架场沿参数曲线的微商意义不大，作为替代应考虑标架场沿曲面的*微分*，这与参数系的选取无关。在这种情况下，可利用*微分形式*的运算统一地得到曲面的几何特性。

若只关心流形的内蕴几何特性，只需将微分 d 替换为协变微分 D 即可。事实上，任一黎曼流形总可光滑嵌入 $\mathbb{E}^n$ 中（*Whitney, Nash*），而在平坦的外围空间中利用通常微分 d 研究流形的特征显然比利用协变微分更加方便，因此下面依然从外围空间中的标架出发来引入活动标架。

6.1 标架空间的结构方程

与自然标架不同，活动标架可能依赖许多参数。事实上，考虑一般情形，记 $\mathbb{R}^n$ 中活动标架原点的矢径为 r, 则有：

$$r = r^i\xi_i$$

其中 ξ_i 为 $\mathbb{R}^n$ 标准基。记活动标架的基底为 e_j, 则：

$$e_j = \xi_i\, a^i{}_j$$

可见，一般来说，确定 $\mathbb{R}^n$ 中的某一活动标架，须知原点坐标 r^i, 以及基矢参量 $a^i{}_j$, 共需 $\left(n+n^2\right)$ 个参量。这些参量所处的空间 $\mathbb{R}^n\times\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{R})$ 称为*标架空间*。

若只考虑右手系，则标架空间限制为 $\mathbb{R}^n\times\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$; 若仅考虑右手单位正交标架，则可将标架空间进一步限制为 $\mathbb{R}^n\times\mathrm{SO}\,(n)$. 再进一步，若只考虑限制在曲面 Σ 上的标架，则 $\mathbb{R}^n$ 可限制为 Σ. 可见，在特定条件下，可以用小于 $\left(n+n^2\right)$ 个参数来描述活动标架限制在标架空间中的区域；对于自然标架而言，$\dim\Sigma$ 个参数足矣。

记 $b = a^{-1}$, 则有 $\xi_k = e_j\, b^j{}_k$. 对矢径取微分，再于活动标架中表示，可得：

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}r^k\,\mathrm{d}\xi_k = \underbrace{\left(b^j{}_k\,\mathrm{d}r^k\right)}_{\omega^j} e_j$$

类似地，对 e_i 微分，可得：

$$\mathrm{d}e_i = \xi_k\,\mathrm{d}a^k{}_i = e_j\,\underbrace{\left(b^j{}_k\,\mathrm{d}a^k{}_i\right)}_{\omega^j{}_i\,\sim\,\omega^j_i}$$

这便是活动标架的微分公式，可以视作自然标架运动公式的推广。

上面的 ω^j, ω^j_i 均为一次微分形式，称为活动标架的相对分量；其中，ω^j 与度量相关，ω^j_i 与联络相关。称此为相对分量，是因为这是将微分用局部标架表示的结果，相应的绝对分量应为前述的 $r^i, a^i{}_j$ 或其微分。

进一步取二阶外微分，利用乘积的外微分法则，可得 ω^j, ω^j_i 应满足的结构方程：

$$\mathrm{d}\omega^j = \omega^k \wedge \omega^j_k, \quad \mathrm{d}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k \tag{6.1}$$

上式对一般活动标架均成立。它表明，相对分量 ω^j, ω^j_i 并不是独立的。

6.2 自然标架场的结构方程

自然标架是一种特殊的活动标架，有 $e_\alpha = r_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. 此时，

$$\mathrm{d}r = r_\alpha\,\mathrm{d}u^\alpha$$

可见，$\omega^\alpha = \mathrm{d}u^\alpha$, 记第三个分量为 $\omega^0 = 0$. 令 Gauss-Weingarten 公式两边与 $\mathrm{d}u^\beta$ 缩并，可得：

$$\mathrm{d}r_\alpha = \underbrace{\left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\beta\right)}_{\omega^\gamma_\alpha,\text{ 联络}} r_\gamma + \underbrace{\left(b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\beta\right)}_{\omega^0_\alpha,\text{ II 基本量}} n, \qquad \mathrm{d}n = \underbrace{\left(-b^\gamma_\beta\,\mathrm{d}u^\beta\right)}_{\omega^\gamma_0,\ \textit{Weingarten}\text{ 映射}} r_\gamma, \qquad \omega^0_0 = 0$$

这便给出了所有相对分量的表达式。用矩阵表示，各分量的分布如下：

$$\mathrm{d}(r_\alpha, n) = (r_\gamma, n)\left(\begin{array}{c|c} \omega^\gamma_\alpha & \omega^\gamma_0 \\ \hline \omega^0_\alpha & \omega^0_0 \end{array}\right) \tag{6.2}$$

将上述分量表达式代入结构方程，注意到 $\omega_0 = 0, \omega^0_0 = 0$, 由于 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ 关于下指标 α, β 对称，可知第一组结构方程：

$$0 = \mathrm{d}\omega^j = \omega^k \wedge \omega^j_k = \omega^\alpha \wedge \omega^j_\alpha = \begin{cases} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha \wedge \mathrm{d}u^\beta\,, & j = \gamma = 1, 2 \\ b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha \wedge \mathrm{d}u^\beta\,, & j = 0 \end{cases}$$

自动成立；而第二组结构方程可拆分为以下部分：

$$\mathrm{d}\omega^0_0 = \omega^\beta_0 \wedge \omega^0_\beta, \tag{6.3a}$$

$$\mathrm{d}\omega^0_\alpha = \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^0_\beta, \quad \mathrm{d}\omega^\gamma_0 = \omega^\beta_0 \wedge \omega^\gamma_\beta, \tag{6.3b}$$

$$\mathrm{d}\omega^\gamma_\alpha = \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^\gamma_\beta + \omega^0_\alpha \wedge \omega^\gamma_0 \tag{6.3c}$$

其中，(6.3a) 揭示了 II 基本量与 Weingarten 映射的一致性，事实上，

$$0 = \mathrm{d}\omega_0^0 = \omega_0^\beta \wedge \omega_\beta^0 = -b_\alpha^\beta b_{\beta\gamma}\, \mathrm{d}u^\alpha \wedge \mathrm{d}u^\gamma$$

容易证明系数 $\left(-b_\alpha^\beta b_{\beta\gamma}\right)$ 关于 α, γ 对称，因此上式自然成立。

同理，不难理解和证明，(6.3b) 中两式等价，因此结构方程中的独立、非平凡部分只有两组：

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^\gamma = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\gamma + \omega_\alpha^0 \wedge \omega_0^\gamma \tag{6.4a}$$

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^0 = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^0 \tag{6.4b}$$

化简上式，将得到 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 与 $b_{\alpha\beta}$ 应满足的相容性条件。

事实上，根据 $r_{\alpha\beta\gamma} = r_{\alpha\gamma\beta}$，以及 $n_{\beta\gamma} = n_{\gamma\beta}$，可以导出与上述方程完全一致的结果。上述两种导出方式的共同点在于，都使用了二阶偏微商可交换的条件。（结构方程的证明利用了二阶外微分为零的特性，而这一特性正是二阶偏微商可交换的直接推论。）其中，(6.4a) 称为 Gauss 方程，(6.4b) 称为 Codazzi 方程。

对于二维的情况，Gauss 方程可约化为：

$$R_{1212} = \det\left(b_{\alpha\beta}\right) \tag{6.5}$$

其中，$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = g_{\delta\eta} R_{\alpha\beta\gamma}^\eta$ 之定义仅与 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 及其偏微商有关；相应地，Codazzi 方程则化为关于 $b_{\alpha\beta}$ 之偏微商的一组方程；但是，在一般形式的 Codazzi 方程中，难以将 g 和 b 分离开来，因此其意义不如 Gauss 方程那么重大（除非取正交曲率线网时，这将在后文中详细说明）。

考察曲面上的高斯曲率，有：

$$K = \frac{\det b}{\det g} = \frac{R_{1212}}{\det g} \tag{6.6}$$

仅仅与第一基本形式有关，而与第二基本形式无关。这正是高斯绝妙定理。可见，高斯曲率与第一基本形式是曲面内蕴几何的体现。

6.3 单位正交的活动标架

可将自然标架的基矢单位正交化，得到单位正交活动标架。此时 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j$，故有：

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0$$

特别对 $i = j$ 的情形，有 $\omega_i^i = 0$.

因此，对一般的单位正交活动标架而言，相对分量中的可变独立参量至多只有 6 个，对应刚体的 6 个自由度。如果该单位正交标架是由自然标架正交化得来的，那么它将只依赖曲面参数 (u, v) 以及一个切平面内的任意旋转 θ. 此时，

$$\mathrm{d}u^\alpha \xrightarrow[\text{线性变换}]{\text{正交化，单位化}} \omega^\alpha,$$

在这种情形下，各相对分量难以像上一节一样用 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, b_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}$ 直接表示出来，但各量的几何意义与对应的自然标架下的量保持一致；事实上，总可以在一点处取正交参数系，再适当重新参数

化，得到一点处的单位正交自然标架，使其与所取的活动标架一致。因此，ω_α^γ 依然表示联络，而 $\omega_\alpha^0,\omega_0^\gamma$ 依然与曲面的外在弯曲有关。

注意到，e_α 是 r_α 的线性组合，且满足正交条件，这导致：

$$\mathrm{I}=\sum_\alpha(\omega^\alpha)^2,\quad (\omega_i^j)=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\omega_1^2 & -\omega_1^0 \\ +\omega_1^2 & 0 & -\omega_2^0 \\ \hline +\omega_1^0 & +\omega_2^0 & 0 \end{array}\right)$$

可以将非零的 ω_i^j 用 ω^α 线性表示出来，这可以通过第一组结构方程 $\mathrm{d}\omega^j=\omega^\alpha\wedge\omega_\alpha^j$ 实现。

首先，考虑联络形式 ω_1^2, 取 $j=\gamma=1,2$, 结合单位正交条件，方程可约化为：

$$\mathrm{d}\omega^\beta=\omega^\alpha\wedge\omega_\alpha^\beta,\quad \alpha\neq\beta$$

设 $\omega_1^2=p\omega^1+q\omega^2$, p,q 为待定系数，代入解得：

$$\omega_1^2=\left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^1+\left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\right)\omega^2 \tag{6.7}$$

欲知 ω_α^0, 则取 $j=0$,

$$0=\mathrm{d}\omega^0=\omega^\alpha\wedge\omega_\alpha^0$$

设 $\omega_\alpha^0=h_{\alpha\beta}\omega^\beta$, 代入上式，得：

$$h_{\alpha\beta}\,\omega^\alpha\wedge\omega_\alpha^0=0$$

当且仅当 $h_{\alpha\beta}=h_{\beta\alpha}$ 时，上式成立。

注意到，ω_α^0 正是 II 基本量对应的微分形式，有：

$$\omega_\alpha^0=\langle n,\mathrm{d}e_\alpha\rangle$$

而：

$$\mathrm{d}^2r=\mathrm{d}u^\alpha\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\,\mathrm{d}r=\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}r_\alpha=\omega^\alpha\,\mathrm{d}e_\alpha$$

从而，

$$\mathrm{II}=\langle n,\mathrm{d}^2r\rangle=\omega^\alpha\omega_\alpha^0=h_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$$

比较 II 的两种表达式：

$$\mathrm{II}=h_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta=b_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}u^\alpha\,\mathrm{d}u^\beta \tag{6.8}$$

可由 $b_{\alpha\beta}$ 确定 $h_{\alpha\beta}$, 进而由 $\omega_\alpha^0=h_{\alpha\beta}\omega^\beta$ 确定 ω_α^0.

综上可知，取 e_α 落在切平面上的单位正交活动标架，则 ω_α^γ 的非零项由 ω^α 唯一确定；而 ω_α^0 或 ω_0^γ 则须结合曲面的第二基本型确定。

6.4 曲面上的几何量

前面已经提及，e_α 落在切平面上的单位正交活动标架并非唯一，标架之间可以相差一个任意的转角 θ. 如果曲面上一点处的某一量与该角度无关，它便是曲面的几何量。

记变换前后的 e_α 可通过一旋转矩阵 $R = R_\theta \in \mathrm{SO}\,(2)$ 联系起来，已知变换前后的不变量：

$$\mathrm{d}r = \omega^\alpha e_\alpha, \quad \mathrm{d}n = \omega_0^\gamma e_\gamma$$

视 $\omega^\alpha, \omega_0^\gamma$ 为列矢，标架旋转 θ, 则 $\omega^\alpha, \omega_0^\gamma$ 均须左乘 $R^{-1} = R_{(-\theta)}$. 由此可见，标架旋转前后，

$$\begin{gathered} \mathrm{d}\sigma = \omega^1 \wedge \omega^2, \quad \mathrm{d}\sigma_n = \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 = \omega_1^0 \wedge \omega_2^0, \\ \mathrm{I} = \sum_\alpha (\omega^\alpha)^2, \quad \mathrm{II} = \omega^\alpha \omega_\alpha^0 \end{gathered} \tag{6.9}$$

不变，从而是曲面上的几何量。

又已知 $\mathrm{II} = h_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$, 可得：

$$\tilde{h} = R^{\mathrm{T}} h R = R^{-1} h R$$

即 $\tilde{h}$ 为 h 做相似变换的结果，从而其秩和行列式不变，它们分别对应中曲率和高斯曲率。

事实上，$\mathrm{d}\sigma_n$ 正是面元 $\mathrm{d}\sigma$ 在 Weingarten 映射下的对应，因为：

$$\omega_0^\gamma = \delta^{\gamma\xi} \langle e_\xi, \mathrm{d}n \rangle \tag{6.10}$$

而根据 (3.9), 这正是 Weingarten 映射的像（的分量）。又知 $\omega_\alpha^0 = h_{\alpha\beta}\omega^\beta$, 直接计算可得，

$$\mathrm{d}\sigma_n = \det h \, \mathrm{d}\sigma \tag{6.11}$$

这又一次证明了，$K = \det h$ 是高斯映射的面积放大率。

对联络形式而言，则有：

$$\omega_\alpha^\gamma = \langle e_\gamma, \mathrm{d}e_\alpha \rangle \tag{6.12}$$

由于一般来说 $\theta \neq \text{const.}$, 联络形式并非几何量，有：

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - (-1)^\alpha \, \mathrm{d}\theta \,, \quad \beta \neq \alpha \tag{6.13}$$

但由于 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\theta) = 0$, 其微分 $\mathrm{d}\omega_\alpha^\gamma$ 确是几何量。而且，对 $\beta \neq \alpha$, 利用第二组结构方程，

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^0 \wedge \omega_0^\beta = (-1)^\alpha K \, \mathrm{d}\sigma_n \tag{6.14}$$

从而：

$$K = (-1)^\alpha \frac{\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta}{\omega^1 \wedge \omega^2}, \quad \beta \neq \alpha \tag{6.15}$$

由于 $\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta$ 仅与 ω^α 有关，这再一次证明了高斯绝妙定理。

7 活动标架的应用

7.1 正交参数系上的联络形式

取正交参数网，自然标架（未单位化）的相对分量也将出现反对称性，只是一般来说对角元 $\omega_i^i \neq 0$. 此时，无须正交化，只需单位化；简记 g 的对角元为 $g_{1,2}$, 有：

$$\omega^\alpha = \sqrt{g_\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha, \quad \mathrm{d}\sigma = \sqrt{\det g}\,\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2$$

注意，等式右边并不对 α 求和。

由于 ω^α 仅与 $\mathrm{d}u^\alpha$ 相差一个系数，可以将其他的相对分量均以 $\mathrm{d}u^\alpha$ 表达出来；若想如上一节一样将它们用 ω^α 表出，只需再考虑系数 $\sqrt{g_\alpha}$ 即可。

欲利用 (6.7) 求得联络形式，须先计算 $\mathrm{d}\omega^\alpha$:

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = \mathrm{d}\sqrt{g_\alpha} \wedge \mathrm{d}u^\alpha = (\sqrt{g_\alpha})_\beta\,\mathrm{d}u^\beta \wedge \mathrm{d}u^\alpha = (-1)^\alpha(\sqrt{g_\alpha})_\beta \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{g_\alpha g_\beta}}, \quad \beta \neq \alpha \tag{7.1}$$

因此，

$$\omega_1^2 = \sum_{\alpha\neq\beta}(-1)^\alpha(\sqrt{g_\alpha})_\beta \frac{\sqrt{g_\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha}{\sqrt{g_\alpha g_\beta}} = \sum_{\alpha\neq\beta}(-1)^\alpha\left(\frac{(\sqrt{g_\alpha})_\beta}{\sqrt{g_\beta}}\right)\mathrm{d}u^\alpha \tag{7.2}$$

利用联络形式在正交参数系下的表达式，结合上一章给出的 (6.15), 可以写出高斯曲率：

$$\begin{aligned} K &= -\sum_{\alpha\neq\beta}(-1)^\alpha\left(\frac{(\sqrt{g_\alpha})_\beta}{\sqrt{g_\beta}}\right)_\beta \frac{\mathrm{d}u^\beta \wedge \mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{\alpha\neq\beta}\left(\frac{(\sqrt{g_\alpha})_\beta}{\sqrt{g_\beta}}\right)_\beta \end{aligned} \tag{7.3}$$

这便是高斯曲率在正交参数系下的内蕴表达式。

7.2 正交曲率线网上的相对分量

若取正交的曲率线网作为参数曲线网，类似记 b 的对角元为 $b_{1,2}$, 则有：

$$\mathrm{II} = h_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta = \sum_\alpha b_{\alpha\beta}(\mathrm{d}u^\alpha)^2$$

已知 $\omega^\alpha = \sqrt{g_\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha$, 比较得 h 也是对角化的，对角元为 $\frac{b_\alpha}{g_\alpha}$, 这与前面定义的主曲率差一符号；为简洁起见，重定义此为主曲率 κ_α. 进一步可得：

$$\omega_\alpha^0 = h_{\alpha\beta}\omega^\beta = \kappa_\alpha\sqrt{g_\alpha}\,\mathrm{d}u^\alpha = \frac{b_\alpha}{\sqrt{g_\alpha}}\,\mathrm{d}u^\alpha$$

注意到，上一章的诸多讨论均只用到了第一组结构方程；第二组结构方程（亦即 Gauss-Codazzi 方程）仅出现了一次，出现在导出 $\mathrm{d}\omega_1^2$ 表达式，从而给出 K 表达式的过程中。下面在正交曲率线网的条件下写出这组方程的显式。

首先，Gauss 方程化为:

$$\det b = -\sqrt{\det g} \sum_{\alpha \neq \beta} \left(\frac{\left(\sqrt{g_\alpha}\right)_\beta}{\sqrt{g_\beta}} \right)_\beta \tag{7.4}$$

等式右边实际上正是前面定义的 R_{1212}, 如果利用 $K = \det h = \frac{\det b}{\det g}$, 将再次给出 K 的内蕴表达式。这并不稀奇；事实上，前面给出 K 表达式的过程中，正是利用了 Gauss 方程。

下面考察 Codazzi 方程。我们从未用过这组方程，因此它应当导出全新的结论。事实上，直接代入已知表达式，简单计算即可得到，

$$(b_\alpha)_\beta = H(g_\alpha)_\beta, \quad \alpha \neq \beta \tag{7.5}$$

其中，为记号方便，定义 $H = \frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{b_\alpha}{g_\alpha}$, 与前文的定义差一符号。

7.3 曲面上的曲线

沿曲面上的曲线 $r(s)$ 确定了一单位切向量场 X, 由前所述，其协变微分定义为:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}X = (\mathrm{d}X)^\mathsf{T} &= \mathrm{d}x^\alpha\, e_\alpha + x^\alpha (\mathrm{d}e_\alpha)^\mathsf{T} \\ &= e_\gamma \left(\mathrm{d}x^\gamma + x^\alpha \omega_\alpha^\gamma\right) \end{aligned}$$

设 X 与活动标架夹 θ 角，则由 X 是单位矢量场，记其法向（左旋 $\frac{\pi}{2}$）为 Y, 可得:

$$X = (\cos\theta, \sin\theta), \quad Y = (-\sin\theta, \cos\theta)$$
$$e_\gamma\, \mathrm{d}x^\gamma = Y\, \mathrm{d}\theta$$

这便给出了协变微分式的第一项。

至于第二项，同样将坐标分量的非零部分用 θ 的三角函数表示:

$$e_\gamma\, x^\alpha \omega_\alpha^\gamma = \left(\omega_2^1 \sin\theta, \omega_1^2 \cos\theta\right) = \omega_1^2 Y$$

综合这两项，可得:

$$\mathrm{D}X = Y\left(\mathrm{d}\theta + \omega_1^2\right) \tag{7.6}$$

取曲线的弧长参数 s 为自变量，则:

$$\omega^1 = (\mathrm{d}s)\cos\theta, \quad \omega^2 = (\mathrm{d}s)\sin\theta \tag{7.7}$$

定义测地曲率:

$$\kappa_g = \frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta + \omega_1^2}{\mathrm{d}s} \tag{7.8}$$

以描述曲线限制在曲面上的弯曲程度。$\kappa_g = 0$ 意味着沿曲线 $\mathrm{D}X = 0$, 此时曲线为曲面上的测地线。

考虑沿同一曲线平行移动的某矢量场 V, 类似记其法向为 U 有:

$$0 = \mathrm{D}V = U\big(\mathrm{d}\phi + \omega_1^2\big)$$

ϕ 为 V 与标架的夹角。这表明,

$$\omega_1^2 = -\,\mathrm{d}\phi \tag{7.9}$$

将其带入 (7.8), 可以得到一个很漂亮的结论:

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \tag{7.10}$$

将 κ 的联络部分用 (7.2) 和 (7.7) 带入，可得:

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \sum_{\alpha\neq\beta}(-1)^\alpha\left(\frac{\big(\sqrt{g_\alpha}\big)_\beta}{\sqrt{g_\beta}}\right)\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \left(\frac{\big(\sqrt{g_1}\big)_2}{\sqrt{g_2}}\right)\frac{1}{\sqrt{g_1}}\cos\theta + \left(\frac{\big(\sqrt{g_2}\big)_1}{\sqrt{g_1}}\right)\frac{1}{\sqrt{g_2}}\sin\theta \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{\big(\ln\sqrt{g_1}\big)_2}{\sqrt{g_2}}\cos\theta + \frac{\big(\ln\sqrt{g_2}\big)_1}{\sqrt{g_1}}\sin\theta \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{(\ln g_1)_2}{2\sqrt{g_2}}\cos\theta + \frac{(\ln g_2)_1}{2\sqrt{g_1}}\sin\theta
\end{aligned} \tag{7.11}$$

这便是测地曲率在正交参数系下的 Liouville 公式。

联络形式 ω_1^2 将测地曲率和高斯曲率紧密地联系在了一起。事实上,

$$\mathrm{d}\theta = \kappa_g\,\mathrm{d}s - \omega_1^2, \quad \mathrm{d}\omega_1^2 = -K\,\mathrm{d}\sigma \tag{7.12}$$

将第一式沿连续可微的简单闭曲线 C 积分，$C = \partial D$, D 是具有一致定向的单连通区域，则:

$$2\pi = \oint_C \mathrm{d}\theta = \oint_C \kappa_g\,\mathrm{d}s + \iint_D K\,\mathrm{d}\sigma \tag{7.13}$$

积分过程中引用了 Stokes 公式。这便是大名鼎鼎的 Gauss-Bonnet 公式。利用 (7.10) 或直接引用 (7.9), 还可导出切向量平行移动一周的倾角变动:

$$\Delta\phi = \iint_D K\,\mathrm{d}\sigma \tag{7.14}$$

8 三维空间的曲线坐标

记空间的标准直角坐标为 (x,y,z), 依此定义曲面坐标系:

$$q^1 = \xi(x,y,z), \quad q^2 = \eta(x,y,z), \quad q^3 = \zeta(x,y,z), \tag{8.1}$$

为保证 q^1,q^2,q^3 相互独立（或者说，是完备的），应要求:

$$\frac{\partial\big(q^1,q^2,q^3\big)}{\partial(x,y,z)} \neq 0$$

与三维空间中的二维曲面类似，通过 $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ 描述的三维空间构成了高维空间中的一个超曲面，确定了一个具有非平凡度规的流形。可将前述二维曲面的内蕴几何进行推广，用以描述该三维流形的内蕴几何特性。

8.1 霍奇对偶

为了方便地将三维空间中的各种微分算子与 d 联系起来，引入霍奇对偶。n 维空间中所有的 p 形式构成线性空间, 由外积的反对称性，该空间的维数应由组合数确定:

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^p T^*_{\mathbf{x}} = \binom{n}{p} \tag{8.2}$$

由二项式系数的对称性，$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, 这说明,

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^p T^*_{\mathbf{x}} = \dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^{n-p} T^*_{\mathbf{x}}$$

霍奇对偶 (Hodge dual) 正是给出了 p 形式空间和 $n-p$ 形式空间的一个同构。若 $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ 为标准直角坐标，不考虑指标的升降变化，则可以简单地定义:

$$\star\left(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}\right) = \mathrm{d}x^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n} \,,$$

其中 $i_1, \ldots, i_n$ 构成 $1, 2, \ldots, n$ 的偶排列。

利用霍奇对偶，可以清楚地将 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量积 $\times$ 与外积 $\wedge$ 联系在一起。事实上，将矢量场 A, B 写成一次微分形式 a, b, 矢量积对应的微分形式正是:

$$\delta_{ij}(A \times B)^i \,\mathrm{d}u^j = \star(a \wedge b) \tag{8.3}$$

对一般的正交坐标系，则宜包含度规的信息 (这样也保证了微分形式具有一致的长度量纲，同时也保证了其协变性)。由于仅考虑正交坐标系，度规张量的非对角元均为 0, 同时对角元非负，故可取活动标架，使相对分量:

$$\omega^j = \sqrt{g_j}\,\mathrm{d}x^j$$

将前述定义中的 $\mathrm{d}x^j$ 均用 ω^j 替代，得定义:

$$\star\left(\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}\right) = \omega^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_n} \tag{8.4}$$

特别地，有:

$$\star 1 = \sqrt{\det g}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \mathrm{d}V \,, \quad \star\mathrm{d}x^i = \frac{\sqrt{\det g}}{g_i}\,\mathrm{d}x^I \tag{8.5}$$

其中 (i, I) 构成偶排列。考虑 $\mathbb{R}^3$ 面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$, 有:

$$\star\,\mathrm{d}\sigma^j = \omega^j, \quad \star\,\omega^j = \mathrm{d}\sigma^j \tag{8.6}$$

对于度规矩阵非正定的情形 (例如四维时空，此时流形为赝黎曼流形), 许多结论可以推广，但确实需另加讨论，以处理负数开根的问题；事实上，上述根式中可能应加绝对值。

8.2 三维微分算子的协变微分形式

梯度、旋度、散度算子有着明确的几何意义，其作用于某一函数所得值的大小与坐标系选取无关，但它们在不同坐标系下的表达式各不相同，这给具体计算带来了很大不便。外微分算子 d 也有相似的几何意义，然而其在正交曲面坐标系中有着一致的表达式，若能将梯度、旋度、散度算子用 d 配合 $\star$ 表达出来，将极大地简化计算。

此节的推导中，为区分矢量、标量，重新引入对矢量记号加粗的约定。有 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^i\mathbf{e}_i = A^i\mathbf{e}_i$. 即约定分量记号 $\mathbf{A}^i = A^i$, $\mathbf{e}_i$ 是正交曲线标架的基矢。首先，

$$\mathrm{d}u = \delta_{ij}(\boldsymbol{\nabla} u)^i\omega^j \tag{8.7}$$

这是平凡的；事实上，指定由某曲线 $\mathbf{r}(t)$ 确定的方向，则方向微商：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\nabla} u = \delta_{ij}(\boldsymbol{\nabla} u)^i\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^j = \delta_{ij}(\boldsymbol{\nabla} u)^i\frac{\omega^j}{\mathrm{d}t}$$

消去 $\mathrm{d}t$ 便得到前述表达式。

将向量场 $\mathbf{A}$ 写成微分形式，有：

$$a = \delta_{ij}A^i\omega^j = \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

比较旋度定理与 Stokes 公式，有：

$$\iint_D(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \oint_C\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint_C a = \iint_D\mathrm{d}a$$

而 $\star\mathrm{d}\sigma^j = \omega^j$, 自然得到，

$$\star\mathrm{d}a = \delta_{ij}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^i\omega^j \tag{8.8}$$

类似地，

$$\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \delta_{ij}A^i\,\mathrm{d}\sigma^j = \delta_{ij}A^i\left(\star\omega^j\right) = \star a$$

比较散度定理与 Stokes 公式，有：

$$\iiint_\Omega\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\Omega}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \oiint_{\partial\Omega}\star a = \iiint_\Omega\mathrm{d}\star a$$

利用 $\star\mathrm{d}V = 1$, 可得：

$$\star\mathrm{d}\star a = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} \tag{8.9}$$

在上式中，若 $\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} u$, 则 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} u = \nabla^2 u$, 此时，$a = \mathrm{d}u$, 自然有：

$$\star\mathrm{d}\star\mathrm{d}u = \nabla^2 u \tag{8.10}$$

上述结论汇总如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \delta_{ij}(\boldsymbol{\nabla} u)^i\omega^j\\
\star\mathrm{d}a &= \delta_{ij}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^i\omega^j\\
\star\mathrm{d}\star a &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\\
\star\mathrm{d}\star\mathrm{d}u &= \nabla^2 u
\end{aligned} \tag{8.11}$$

8.3 指标升降记号

三维微分算子的协变形式可以在记号上进一步得到简化。一般地，考虑矢量场：

$$X = X^i e_i$$

其中 e_i 是由正交曲线坐标确定的单位正交基矢。注意到，$e_i = \hat{r}_i$,

$$\partial_i \equiv r_i \neq e_i$$

这与二维曲面的情形类似，e_i 是由正交曲线系确定的单位正交活动标架之基矢，并不总是自然标架的基矢。以柱坐标 (ρ, θ, z) 为例，有：

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta \tag{8.12}$$

已知 $\mathrm{d}r = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$, x^i 是标准正交基下的坐标；根据参数变换的规律可知，

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial q^i}\frac{\partial x^m}{\partial q^j}, \\ \mathrm{I} &= (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \end{aligned} \tag{8.13}$$

类比二维曲面的情形，可知，若将该三维流形嵌入平直的 $\mathbb{E}^n$ 中，则其基矢：

$$\|r_\rho\| = \|r_z\| = 1, \quad \|r_\theta\| = \rho$$

从而，$\partial_\rho = e_\rho$, $\partial_z = e_z$, 但是 $\partial_\theta = \rho\, e_\theta$. 一般来说，对正交曲线标架，有：

$$\begin{aligned} X &= X^i e_i = \tilde{X}^i \partial_i, \\ \partial_i &= \sqrt{g_i}\, e_i, \quad \tilde{X}^i = \frac{1}{\sqrt{g_i}} X^i \end{aligned} \tag{8.14}$$

记 X 在对偶矢量空间中的对应为：

$$X^\flat = \tilde{X}_i\,\mathrm{d}x^i = g_{ij}\tilde{X}^i\,\mathrm{d}x^j$$

$\flat$ 表指标下降；相反地，$\sharp$ 表指标上升。对正交曲线标架，将 $\tilde{X}^i$ 用 X^i 表示，自然得到：

$$X^\flat = \delta_{ij} X^i \omega^j$$

利用升降记号，可将 $\mathbb{R}^3$ 微分算子进一步简化。有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} u &= (\mathrm{d}u)^\sharp \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} &= \star\,\mathrm{d}\star(\mathbf{A}^\flat) \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} &= \big(\star\,\mathrm{d}(\mathbf{A}^\flat)\big)^\sharp \\ \nabla^2 u &= \star\,\mathrm{d}\star\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{8.15}$$

其中，假定 $\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ 的结果均是列矢。