常用特殊函数的引入及其思考

Bryan[1*]

摘要

在通常的数学物理方法教材中，往往通过求解微分方程得到相应的常用特殊函数．本文尝试指出这一方法的一些缺陷，同时介绍了另一种更为自然的思路，即通过生成函数引入一些基本的特殊函数．

关键词

特殊函数　生成函数　Legendre 函数　Bessel 函数

[1]北京大学物理学院　*通讯作者

1. 引言

在经典的数学物理方法教材[1−4]中，往往将微分算子在特殊坐标系下分离变量，通过求解本征方程得到相应的本征函数，从而定义常用特殊函数（球函数、柱函数）．其中，球函数、柱函数之意义与[1]一致，分别对应拉普拉斯算符 ∇^2 的角向、径向本征函数．

这一过程在数学上充分严谨，但繁琐而不甚直观，且由此确定的特殊函数可能与通常定义相差一个常数倍数．事实上，以 Bessel 方程为例，在 $z=0$ 邻域内求得的级数解具有如下形式：

$$C_\nu(z) = c_0 z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

可见 c_0 的选取是完全任意的，当且仅当 $c_0 = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}$ 时，$C_\nu \equiv J_\nu$，即得通常定义的 Bessel 函数．

c_0 选取的任意性启示我们，从求解 Bessel 方程导出 Bessel 函数，似乎不是最自然的选择．同时，考虑整数阶 Bessel 函数的生成函数，有：

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n .$$

在这一展开式中，J_n 的系数便被自然且唯一地确定了，且得到 J_n 定义的过程无疑比解方程简明得多，同时具有明确的物理意义．

此外，对于球函数，也可以采用类似的办法引入．下面以 Legendre 函数与 Bessel 函数为例，阐明通过生成函数引入特殊函数的办法．

2. Legendre 函数的引入

利用电磁学的知识，或更为严格地，考虑 Poisson 方程的格林函数，可以给出位于原点之点源的势函数：

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}. \tag{1}$$

考虑点源偏离原点的情形，根据无界空间的对称性，采用[5]之记号，记 $\boldsymbol{\mathscr{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，有：

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathscr{r}}. \tag{2}$$

尝试将这一结果展开成变量分离的形式．设 $\boldsymbol{r}'$ 落在 $+z$ 轴上，取球坐标 (r,θ,φ)，则 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 夹角为 θ，即有 $\mathscr{r} = \sqrt{r'^2+r^2-2r'r\cos\theta}$，按 r, r' 的级数展开，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathscr{r}} &= \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta), \quad r \ge a > r'\,;\\ &= \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos\theta), \quad r \le a < r'\,.\end{aligned} \tag{3}$$

第一个展开式适用于 $r \gg r'$，即点源位于球 $r=a$ 内，场点位于较远处的情形；第二个展开式通过调换第一个展开式中的 r, r' 得到，适用于相反的情形，即 $r \ll r'$，场点位于球内，点源位于球外．

引入记号 $r_<, r_>$ 分别表示 r, r' 中的较小、较大者，可以将上述两式合为适用于全空间的一式：

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\theta)\,. \tag{4}$$

该式仅在 $r=r'$ 且 $\cos\theta=1$ 时发散，这对应 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$，与物理图像吻合．

展开式中的 $P_l(x), l\in\mathbb{N}$ 是多项式函数，记比值 $t=\frac{r}{r'}$，或简单取 $r'=1$，

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)\,, \tag{5}$$

称 $P_l(x)$, $l \in \mathbb{N}$ 为 Legendre 多项式；注意有 $P_l(1) = 1$. 其一般表达式为：

$$P_l(x) = \frac{1}{l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\bigg|_{t=0}\,. \tag{6}$$

在此基础上，可将 (6) 化为更实用的 Rodrigues 公式，即：

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l. \tag{7}$$

上述过程便自然地给出了 Legendre 多项式的定义.

若要验证这一定义与 Legendre 方程的兼容性，只需将 G 代入其满足的 Poisson 方程，便自然给出 $P_l(x)$ 满足的方程，它正是 Legendre 方程.

3. Bessel 函数的引入

首先，考虑全平面上的齐次 Helmholtz 方程：

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\tilde{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2\,, \tag{8}$$

这一方程的解将给出 $\mathbb{R}^2$ 平面上驻波对应的相因子. 若取平面极坐标 (r,φ)，则解可以直接推广到 $\mathbb{R}^3$ 当中的柱坐标 (r,φ,z) 下，描述 $\mathbb{R}^3$ 空间中的柱面驻波.

显然，平面波（相因子）$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 是该方程的解，这可通过将方程在直角坐标下分离变量求解得到. 采取与上一节类似的做法，尝试将 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 展开成在极坐标下变量分离的形式；取波矢方向 $\boldsymbol{k} = k\,\hat{\boldsymbol{j}}$，按 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 上的 Fourier 级数展开，有：

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = e^{ikr\sin\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr)\,e^{im\varphi}\,. \tag{9}$$

记 $t = e^{i\varphi}$，将上式中指数上的 $\sin\varphi$ 用 t 的函数取代，可以得到更为简洁的形式：

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\,t^m\,, \tag{10}$$

$J_m(x)$ 即为整数阶 Bessel 函数，$J_m(kr)\,e^{im\varphi}$ 代表以原点为中心的柱面波. 在此基础上，不难给出其级数展开式.

4. 总结

综上所述，通过生成函数引入 Legendre 函数与 Bessel 函数是自然而可行的. 相较于直接求解方程，这一办法更具物理直观. 当然，通过生成函数定义的缺陷也是明显的，它往往只能定义整数阶的特殊函数；对于非整数阶的特殊函数，必须得借由相应的微分方程来定义.

参考文献

[1] 吴崇试. 数学物理方法. 北京大学出版社, 北京, 2003.

[2] 梁昆淼. 数学物理方法. 高等教育出版社, 北京, 2010.

[3] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论. 北京大学出版社, 2000.

[4] Richard Courant and David Hilbert. *Methods of mathematical physics*. CUP Archive, 1965.

[5] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. AAPT, 2005.